Entwicklung algebraischer Methoden für die Berechnung der Korrelationsfunktionen integrabler Spinketten

Masterarbeit

Zur Erlangung des Grades
Master of Science - Physik
vorgelegt von
Henrik Jürgens

8. August 2019

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Erstgutachter: Prof. Dr. Hermann Boos
Zweitgutachter: PD. Dr. Frank Göhmann

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In dieser Arbeit geht es um die Fragestellung, inwiefern sich die Korrelationsfunktionen der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette im kritischen Parameterbereich $|q| = 1$ mittels „**Bosonisierung**" beschreiben lassen. Im Gegensatz zum Parameterbereich $-1 < q < 0$, bei dem das Modell massiv ist,[1] existiert bisher keine eindeutige Beschreibung des physikalischen Zustandsraumes durch einen bosonischen Fockraum.[2] Im Parameterbereich $-1 < q < 0$ lässt sich dies mit der **Ecken-Transfermatrix-Methode** (ETM) begründen, sodass sich die Korrelationsfunktionen durch Spuren über Produkte von sogenannten Vertex-Operatoren ausdrücken lassen. Diese entsprechen den Intertwinern der Höchstgewichtsdarstellungen der Quantengruppe $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ und bilden eine Darstellung der Faddeev-Zamolodchikov-Algebra, sodass die daraus konstruierten Korrelationsfunktionen einem System von Gleichungen, den quantum-Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichungen (qKZ), genügen (vgl. [1] S. 1181 f.). Aufgrund von Divergenzen ist die Ecken-Transfermatrix im masselosen Fall $|q| = 1$ nicht wohldefiniert, sodass die ETM nicht direkt anwendbar ist.

Trotzdem lässt sich die Gültigkeit der qKZ-Gleichungen für die masselose XXZ-Spinkette ($n = 2$) mit einem Grenzfall des massiven XYZ-Modells, für welches die ETM anwendbar ist, begründen (vgl. [2]). Für beliebiges n wird die Gültigkeit der qKZ-Gleichungen durch einen Grenzfall des Belavin $\mathbb{Z}_n$ Modells begründet (vgl. [1] S. 1182). Insbesondere konnten Darstellungen der Faddeev-Zamolodchikov-Algebra in Form von Vertex-Operatoren auf einem bosonischen Fockraum konstruiert werden (siehe [1],[3]). Die Entsprechung der auf diese Weise konstruierten Lösungen der qKZ-Gleichungen mit den Korrelationsfunktionen der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette ist unklar und muss z.B. durch den Vergleich mit bekannten Resultaten überprüft werden. Im Fall $n = 2$ wurde dies im Paper [3] von M. Jimbo, H. Konno und T. Miwa durch den Vergleich mit einer direkten Konstruktion gezeigt (vgl. [2]). Für die im Paper [1] von T. Kojima und S. Yamasita konstruierte Bosonisierung ist dies nicht klar.

Da im Paper [4] eine Bosonisierung der Typ II Vertex-Operatoren der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette durch einen Grenzwert des elliptischen $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modells [5] konstruiert wurde, soll untersucht werden, in wie fern T. Kojima und S. Yamasitas Bosonisierung durch einen analogen Grenzwert konstruiert werden kann.

Als zweites sollen die Methoden zur Berechnung von Spuren über Produkte von Vertex-Operatoren erarbeitet werden, sodass die im Paper [1] von T. Kojima und S. Yamasita konstruierten Integraldarstellungen überprüft werden können.

Das dritte Ziel besteht in dem Vergleich der Integraldarstellungen mit bekannten Resultaten für die Korrelationsfunktionen der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette. Insbesondere sollen im Fall $n = 2$ die Konstruktionen und Ergebnisse der Paper [1] und [3] verglichen werden.

---

[1] D.h. der niedrigste Eigenwert Λ_0 des Hamiltonoperators $\mathcal{H}$ ist durch eine Lücke vom Rest des Spektrums $\sigma(\mathcal{H}) \setminus \{\Lambda_0\}$ getrennt.

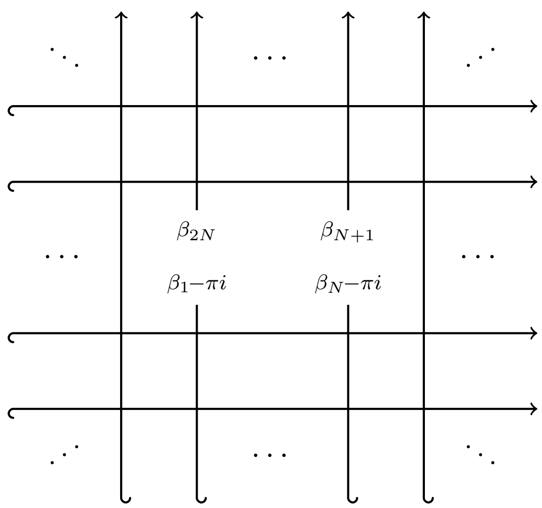
[2] sog. „Bosonisierung"

2. Die $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette

Sei $V := \oplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{C} e_k$ ein n-dimensionaler Vektorraum mit Standardbasis $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei V_k eine Kopie von V. Der Hamilton-Operator $\mathcal{H}$ der eindimensionalen $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette ist als Operator auf dem Zustandsraum $\bigotimes_{k\in\mathbb{Z}} V_k$ durch

$$\mathcal{H} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ q \sum_{\substack{a,b=0\\a>b}}^{n-1} {E^a}_a^{(k+1)} {E^b}_b^{(k)} + q^{-1} \sum_{\substack{a,b=0\\a<b}}^{n-1} {E^a}_a^{(k+1)} {E^b}_b^{(k)} - \sum_{\substack{a,b=0\\a\neq b}}^{n-1} {E^a}_b^{(k+1)} {E^b}_a^{(k)} \right\} \tag{2.1}$$

gegeben, wobei ${E^a}_b \in \mathrm{End}(V)$ die Darstellungsmatrix mit den Einträgen $({E^a}_b)_{i,j} = (\delta_{a,i}\delta_{b,j})_{i,j}$ habe. ${E^a}_b^{(k)} \in \mathrm{End}(\bigotimes_{k\in\mathbb{Z}} V_k)$ ist dann der Operator, der auf V_k wie ${E^a}_b$ wirkt und außerhalb als Identität. Streng genommen ist der Raum $\bigotimes_{k\in\mathbb{Z}} V_k$ zu groß, da es Zustände „unendlicher Energie“ gibt, sodass der Operator $\mathcal{H}$ nicht wohldefiniert ist. Deshalb ist es sinnvoll, sich auf die lineare Hülle $\mathcal{W} := \langle\{v \in \bigotimes_{k\in\mathbb{Z}} V_k \,|\, \mathcal{H}v = \lambda v \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\}\rangle$ aller Eigenvektoren endlicher Energie zu beschränken, dem „physikalischen Zustandsraum“. Die Korrelationsfunktionen sind dann definiert als die Grundzustandserwartungswerte $\langle\mathcal{O}\rangle$ lokaler Operatoren $\mathcal{O}$ [3]. Wegen der Translationsinvarianz des Hamilton-Operators reicht es aus, die Grundzustandserwartungswerte der Operatoren ${E^{\underline{\epsilon}(N)}}_{\underline{\epsilon}'(N)} := {E^{\epsilon_1}}_{\epsilon'_1}^{(1)} {E^{\epsilon_2}}_{\epsilon'_2}^{(2)} \ldots {E^{\epsilon_N}}_{\epsilon'_N}^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$, zu berechnen, sodass sich der allgemeine Fall durch Translation und Linearkombination ergibt (vgl. [1] S. 1182). Ferner sei V_k^*, $k \in \mathbb{Z}$, eine Kopie des Dualraums $V^* := \oplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{C} e_k^*$ von V, d.h. $e_k^*(e_j) = \delta_{ij}$. Dann bezeichne $G^{(N)}(\beta_1, \ldots, \beta_N | \beta_{N+1}, \ldots, \beta_{2N}) \in (\bigotimes_{k=1}^N V_k^*) \otimes (\bigotimes_{k=1}^N V_{N+k})$ die inhomogene N-Punkt-Korrelationsfunktion der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette. Diese ist definiert als thermodynamischer Limes der reduzierten Dichtematrix des der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette entsprechenden Vertex-Modells[4], wobei den offenen Linien die Inhomogenitäten $\beta_1 - \pi i, \ldots, \beta_N - \pi i, \beta_{N+1}, \ldots, \beta_{2N}$ entgegen dem Uhrzeigersinn zugeordnet werden.



Reduzierte Dichtematrix $G^{(N)}$ des $\mathfrak{su}(n)$-Vertex-Modells

[3] Operatoren, die nur an endlich vielen Stellen der Kette nichttrivial wirken.
[4] Manchmal auch $\mathfrak{su}(n)$-Vertex-Modell mit periodischen Randbedingungen genannt.

Der Zusammenhang zwischen $G^{(N)}$ und $\langle E^{\underline{\epsilon}(N)}{}_{\underline{\epsilon}'(N)}\rangle$ kann am Beispiel der Heisenberg XXZ-Spinkette ($n = 2$) verstanden werden. Im massiven Fall $-1 < q < 0$ existieren zwei verschiedene Grundzustände und $G^{(N)}$ ist definiert als (normierte) Summe zweier Funktionen $F_n^{(i)}$ ($i = 0, 1$), aus denen sich der Grundzustandserwartungswert zum Grundzustand i durch Gleichsetzen aller Inhomogenitäten ergibt. Obwohl die Ecken-Transfermatrix-Methode im masselosen Fall nicht direkt anwendbar ist, kann man diesen als einen Grenzfall der XYZ-Spinkette betrachten, für welche die Ecken-Transfermatrix-Methode anwendbar ist (vgl. [3]). Da die Entartung des Grundzustandes im Gegensatz zum massiven Fall aufgehoben ist, ergeben sich die Grundzustandserwartungswerte direkt aus $G^{(N)}$ durch Gleichsetzen aller Inhomogenitäten. Der Grundzustandserwartungswert von $E^{\underline{\epsilon}(N)}{}_{\underline{\epsilon}'(N)}$ ist also gegeben durch

$$\langle E^{\underline{\epsilon}(N)}{}_{\underline{\epsilon}'(N)}\rangle = G^{(N)}(\beta + \pi i, \ldots, \beta + \pi i|\beta, \ldots, \beta)(E^{\underline{\epsilon}(N)}{}_{\underline{\epsilon}'(N)}). \tag{2.2}$$

Hierbei wurde $E^{\epsilon_1}{}_{\epsilon'_1}{}^{(1)} E^{\epsilon_2}{}_{\epsilon'_2}{}^{(2)} \ldots E^{\epsilon_N}{}_{\epsilon'_N}{}^{(N)}$ mit dem dualen Basisvektor zu $e^*_{\epsilon_1} \otimes \ldots \otimes e^*_{\epsilon_N} \otimes e_{\epsilon'_N} \otimes \ldots \otimes e_{\epsilon'_1} \in (\bigotimes_{k=1}^N V_k^*) \bigotimes (\bigotimes_{k=1}^N V_{N+k})$ identifiziert (vgl. [2] S. 2). Im Allgemeinen kann die $A^{(1)}_{n-1}$-Spinkette als Grenzfall des Belavin $\mathbb{Z}_n$ Modells gesehen werden, sodass $G^{(N)}$ die **quantum-Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichungen**

$$\begin{aligned} &G^{(N)}(\beta_1, \ldots, \beta_j - \lambda i, \ldots, \beta_N|\beta_{N+1}, \ldots, \beta_{2N}) \\ &= R^{V^*V^*}_{j,j-1}(\beta_j - \beta_{j-1} - \lambda i) \ldots R^{V^*V^*}_{j,1}(\beta_j - \beta_1 - \lambda i) \\ &\cdot R^{V^*V}_{j,2N}(\beta_j - \beta_{2N}) \ldots R^{V^*V}_{j,N+1}(\beta_j - \beta_{N+1}) \\ &\cdot R^{V^*V^*}_{j,N}(\beta_j - \beta_N) \ldots R^{V^*V^*}_{j,j+1}(\beta_j - \beta_{j+1}) \\ &\cdot G^{(N)}(\beta_1, \ldots, \beta_j, \ldots, \beta_N|\beta_{N+1}, \ldots, \beta_{2N}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &G^{(N)}(\beta_1, \ldots, \beta_N|\beta_{N+1}, \ldots, \beta_j + \lambda i, \ldots, \beta_{2N}) \\ &= R^{VV}_{j+1,j}(\beta_{j+1} - \beta_j + \lambda i) \ldots R^{VV}_{2N,j}(\beta_{2N} - \beta_j + \lambda i) \\ &\cdot R^{V^*V}_{1,j}(\beta_1 - \beta_j) \ldots R^{V^*V}_{N,j}(\beta_N - \beta_j) \\ &\cdot R^{VV}_{N+1,j}(\beta_{N+1} - \beta_j) \ldots R^{VV}_{j-1,j}(\beta_{j-1} - \beta_j) \\ &\cdot G^{(N)}(\beta_1, \ldots, \beta_N|\beta_{N+1}, \ldots, \beta_j, \ldots, \beta_{2N}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit der **Normalisierung**

$$\begin{aligned} &G^{(N)}(\beta + i(\pi - \lambda), \beta_2, \ldots, \beta_N|\beta_{N+1}, \ldots, \beta_{2N-1}, \beta)_{1,\ldots,N,N+1,\ldots,2N} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e_k^* \otimes G^{(N-1)}(\beta_2, \ldots, \beta_N|\beta_{N+1}, \ldots, \beta_{2N-1})_{2,\ldots,N,N+1,\ldots,2N-1} \otimes e_k \end{aligned} \tag{2.5}$$

erfüllt. Hierbei ist $R^{VV}_{i,j}(\beta) \in \mathrm{End}\left((\bigotimes_{k=1}^N V_k^*) \bigotimes (\bigotimes_{k=1}^N V_{N+k})\right)$ der Operator, welcher als R-Matrix $R^{VV}(\beta) \in \mathrm{End}\,(V \bigotimes V)$ des $\mathfrak{su}(n)$-Vertex-Modells in der (i, j)-ten Tensorkomponente wirkt und als Identität in allen anderen Komponenten. Die Operatoren

$R^{V^*V^*}(\beta) \in \mathrm{End}\,(V^* \otimes V^*))$ und $R^{V^*V}(\beta) \in \mathrm{End}\,(V^* \otimes V))$ sind in Kapitel 4 durch die Vertauschungsrelationen der Vertex-Operatoren gegeben (Definition 4.2 und 4.3).

2.1. R-Matrix des $\mathfrak{su}(n)$-Vertex-Modells

In diesem Abschnitt wird die R-Matrix des $\mathfrak{su}(n)$-Vertex-Modells eingeführt und mit dem Hamilton-Operator der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette in Verbindung gebracht. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser bereits mit Vertex-Modellen vertraut ist, andernfalls ist in Abschnitt 3.1 eine kurze Einführung am Beispiel des 6-Vertex-Modells gegeben.

Definition 2.1 (R-Matrix)**.**
Sei $V := \oplus_{k=0}^{n-1}\mathbb{C}e_k$ wie oben. Dann ist die R-Matrix $R^{VV}(\beta) \in End(V \otimes V)$ des $\mathfrak{su}(n)$-Vertex-Modells definiert durch

$$R^{VV}(\beta) = r(\beta)\bar{R}(\beta) \quad r(\beta) = -\frac{S_2(i\beta|\frac{2\pi}{n}\xi, 2\pi)S_2(-i\beta + \frac{2\pi}{n}|\frac{2\pi}{n}, 2\pi)}{S_2(-i\beta|\frac{2\pi}{n}\xi, 2\pi)S_2(i\beta + \frac{2\pi}{n}\xi, 2\pi)}, \tag{2.6}$$

mit der Multi-Sinusfunktion $S_2(\beta|\omega_1, \omega_2)$ (siehe Anhang A).
Die nichttrivialen Komponenten des Operators $\bar{R}(\beta) \in End(V \otimes V)$,

$$\bar{R}(\beta)e_{j_1} \otimes e_{j_2} = \sum_{k_1,k_2=0}^{n-1} \bar{R}(\beta)_{j_1 j_2}^{k_1 k_2} e_{k_1} \otimes e_{k_2}, \tag{2.7}$$

sind durch

$$\bar{R}(\beta)_{j\,j}^{j\,j} = 1 \tag{2.8}$$

$$\bar{R}(\beta)_{j\,k}^{j\,k} = -\frac{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}\beta\right)}{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta + \frac{2\pi i}{n})\right)} \qquad (j \neq k) \tag{2.9}$$

$$\bar{R}(\beta)_{k\,j}^{j\,k} = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{n}{2\xi}\beta}\sinh\left(\frac{\pi i}{\xi}\right)}{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta + \frac{2\pi i}{n})\right)} & (j < k) \\[2ex] \dfrac{e^{\frac{n}{2\xi}\beta}\sinh\left(\frac{\pi i}{\xi}\right)}{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta + \frac{2\pi i}{n})\right)} & (j > k), \end{cases} \tag{2.10}$$

gegeben.

Sei V_k eine Kopie von V, dann erfüllt die R-Matrix R^{VV} die

1. **Yang-Baxter-Gleichung**

$$R_{12}^{VV}(\beta_1-\beta_2)R_{13}^{VV}(\beta_1-\beta_3)R_{23}^{VV}(\beta_2-\beta_3) = R_{23}^{VV}(\beta_2-\beta_3)R_{13}^{VV}(\beta_1-\beta_2)R_{12}^{VV}(\beta_1-\beta_2), \tag{2.11}$$

wobei hier die R-Matrix $R_{ij}^{VV} \in \mathrm{End}\,(V_i \otimes V_j)$ als Element von $\mathrm{End}\,(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$ aufgefasst wird, welches die Komponente $\neq i, j$ unverändert lässt.

2. **Unitaritätsbedingung**

$$R_{12}^{VV}(\beta_1-\beta_2)R_{21}^{VV}(\beta_2-\beta_1)=id. \tag{2.12}$$

Definition 2.2 (Transfermatrix)**.**
Die Transfermatrix $T(\beta) \in End\left(\bigotimes_{k=1}^{N} V_k\right)$ ist definiert durch

$$T(\beta)=tr_0(R_{0\,1}^{VV}(\beta)\dots R_{0\,N}^{VV}(\beta)), \tag{2.13}$$

wobei $tr_0(\cdot)$ die Spur bezüglich V_0 ist.

Aus der Unitarität, der Invarianz der Spur unter zyklischer Vertauschung und durch N-faches Anwenden der Yang-Baxter-Gleichung folgt die Kommutativität der durch β parametrisierten Familie von Transfermatrizen

$$[T(\beta),T(\beta')]=0. \tag{2.14}$$

Da die Komponenten meromorphe Funktionen in β sind, kann $T(\beta)$ lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden. Es lässt sich zeigen, dass der erste Koeffizient im thermodynamischen Limes $N \to \infty$ proportional zum Hamilton-Operator $\mathcal{H}$ der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette ist.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\log(T)\right)(0) \propto \mathcal{H}+const. \tag{2.15}$$

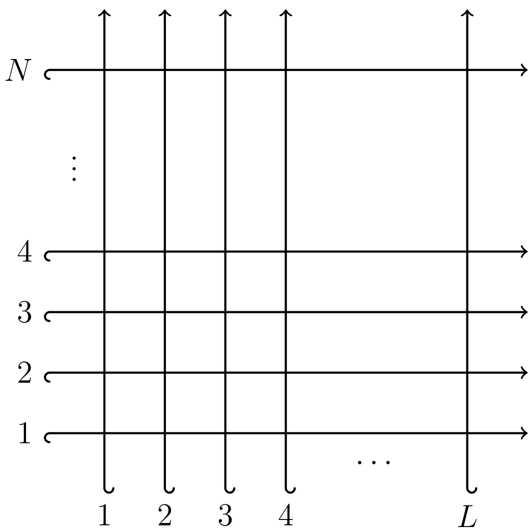
Auf diese Weise ist $T(\beta)$ erzeugende Funktion einer abzählbar unendlichen Familie von Bewegungsintegralen. (Siehe [1] S. 1184 f.)

3. Die Ecken-Transfermatrix-Methode

Die Ecken-Transfermatrix-Methode ist eine Methode zur Berechnung der Korrelationsfunktionen massiver integrabler Gittermodelle und wurde ursprünglich 1977 von R. Baxter eingeführt (vgl. [6] und [7]). In diesem Abschnitt soll ein Überblick über die Funktionsweise dieser Methode anhand des 6-Vertex-Modells bzw. seines Spin-Ketten Äquivalents, der Spin 1/2 Heisenberg XXZ-Kette[5], gegeben werden. Eine ausführliche Erklärung ist in dem Buch [8] zu finden, wobei dort die Pfeile im Vergleich zu der Notation in diesem Kapitel in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Dies hat zur Folge, dass sich die Multiplikationsreihenfolge umdreht.

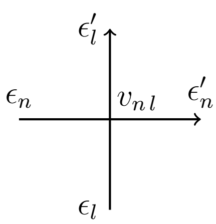
3.1. Das 6-Vertex-Modell

Betrachte das 6-Vertex-Modell mit periodischen Randbedingungen auf dem endlichen Gitter der horizontalen und vertikalen Längen L und N, d.h. auf einem endlichen Torus.



6-Vertex-Modell auf einem $L \times N$-Torus

Eine **Konfiguration** C auf dem Gitter ist definiert durch eine Festlegung von Spin-Variablen, die den horizontalen und vertikalen Verbindungslinien zweier nebeneinanderliegender Vertices (=: Kanten) zugeordnet werden. Dabei werden jedem Vertex $v_{n\,l}$ **Boltzmann-Gewichte** zugeordnet, die von den diskreten Spin-Variablen ϵ_k und ϵ_k', $k = n, l$, der anliegenden ein- und auslaufenden Kanten abhängen.



$$=: R^{\epsilon_n' \epsilon_l'}_{\epsilon_n \epsilon_l}(\lambda_n - \lambda_l)$$

[5] Entsprechend der obigen Notation ist das die $A_1^{(1)}$-Spinkette im Parameterbereich $-1 < q < 0$.

Diese sind in der R-**Matrix** des 6-Vertex-Modells zusammengefasst, welche glatt von der Differenz zweier den horizontalen und vertikalen Linien zugeordneten Spektralparameter λ_n und λ_l abhängt. Sie ist gegeben durch

- $a := R^{11}_{11}(\lambda) = R^{00}_{00}(\lambda) = \rho(\lambda)\sinh(\lambda+\eta)$,
- $b := R^{10}_{10}(\lambda) = R^{01}_{01}(\lambda) = \rho(\lambda)\sinh(\lambda)$,
- $c := R^{10}_{01}(\lambda) = R^{01}_{10}(\lambda) = \rho(\lambda)\sinh(\eta)$ und
- $R^{\epsilon'_n\epsilon'_l}_{\epsilon_n\epsilon_l}(\lambda) = 0$ in allen anderen Fällen.

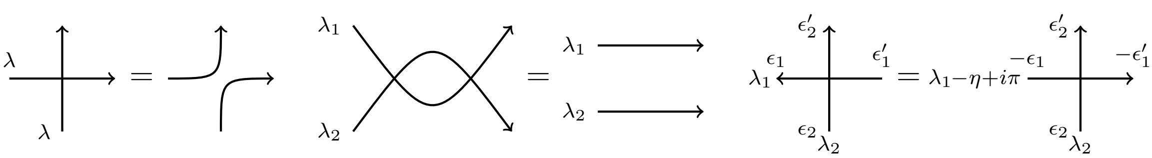
Die Indizes $1 \le n \le N$ und $1 \le l \le L$ bestimmen dabei die Lage des Vertex $v_{n\,l}$ im Gitter. Damit gibt es pro Vertex 6 nichttriviale Boltzmann-Gewichte. Es ist festzuhalten, dass das Gewicht eines Vertex $v_{n\,l}$ genau dann ungleich null ist, wenn die angrenzenden Spin-Variablen die Bedingung $\epsilon_n + \epsilon_l = \epsilon'_n + \epsilon'_l$ erfüllen. Da sich das 6-Vertex-Modell als zweidimensionales Modell für kristallines H_2O interpretieren lässt, erhält diese Regel den Namen „Eisregel“. Das **Gewicht** $W(C)$ einer festen Konfiguration C auf dem Gitter ist dann definiert als das Produkt aller den Vertices entsprechend der Konfiguration C zugeordneten Boltzmann-Gewichte

$$W(C) := \prod_{n=1}^{N}\prod_{l=1}^{L} R^{\epsilon'_n(C)\epsilon'_l(C)}_{\epsilon_n(C)\epsilon_l(C)}(\lambda_n - \lambda_l). \tag{3.1}$$

Da die diskreten Variablen der Linien in diesem Fall ($n = 2$) per Definitionem nur die Werte 0 und 1 annehmen können, kann man jeder horizontalen Linie formal eine Kopie V_l des zweidimensionalen Vektorraums $V := \oplus_{k=0}^{1}\mathbb{C}e_k$ mit Standardbasis e_0, e_1 zuordnen. Analog kann man jeder vertikalen Linie einen zweidimensionalen Vektorraum V_n zuordnen, sodass sich die R-Matrix R des Vertex $v_{n\,l}$ $(=: R_{n\,l})$ als Element von $\mathrm{End}(V_n \otimes V_l)$ interpretieren lässt. Die Normalisierung $\rho(\lambda)$ kann dabei so gewählt werden, dass die Bedingungen

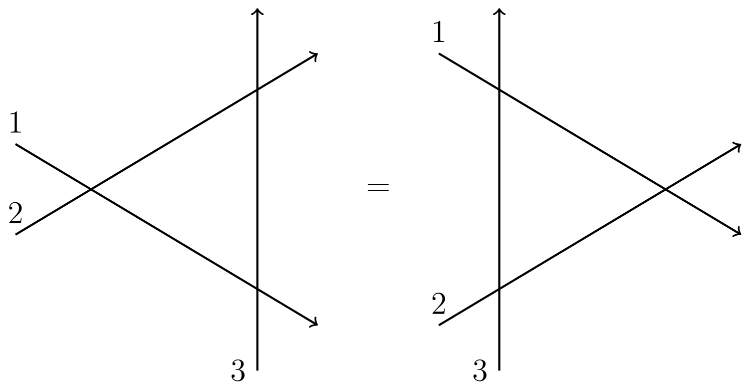
- $R_{12}(0) = P$ **Anfangsbedingung**,
- $R_{21}(\lambda_2-\lambda_1)R_{12}(\lambda_1-\lambda_2) = 1$ **Unitarität** und
- $(R_{21}(\lambda_2-\lambda_1))^{t_1} = (\sigma^x \otimes 1)R_{12}(\lambda_1-\lambda_2-\eta+i\pi)(\sigma^x\otimes 1)$ **Crossing-Symmetrie**

erfüllt sind, solange R regulär ist. Dabei ist $P \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$, $P(e_i \otimes e_j) := e_j \otimes e_i$, die Permutation, $\sigma^x \in \mathrm{End}(V_1)$, $\sigma^x(e_j) := e_{1-j}$, die Spinflip-Abbildung und $(\cdot)^{t_1}$ die Transposition bezüglich V_1.



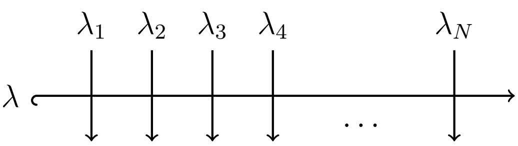
Anfangsbedingung **Unitarität** **Crossing-Symmetrie**

Die Gleichungen sind so zu verstehen, dass über die diskreten Variablen der inneren Linien summiert wird. Man kann zeigen, dass $\rho(\lambda) = \frac{(q^4\xi^{-2};q^4)_\infty(q^2\xi^2;q^4)_\infty}{\xi(q^4\xi^2;q^4)_\infty(q^2\xi^{-2};q^4)_\infty}$ die einzige analytische Lösung im Gebiet $q^2 \leq |\xi^2| \leq q^{-2}$ ist, wobei $q := e^\eta$, $\xi := e^\lambda$ und $(z;p)_\infty := \prod_{n=1}^\infty(1 - zp^n)$ sei. $\frac{1}{\rho(\lambda)}$ entspricht dem bekannten exakten Ergebnis für die Zustandssumme pro Gitterplatz unter der Wahl $\rho(\lambda) = \frac{1}{\sinh(\lambda+\eta)}$ (vgl. [8] S. 29). Durch die Multiplikation von R mit der Permutation $P \in \mathrm{Hom}(V_n \otimes V_l, V_l \otimes V_n)$, $P(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i$, $i, j = 1, 2$, ergibt sich das äquivalente Objekt $\check{R} := PR \in \mathrm{Hom}(V_n \otimes V_l, V_l \otimes V_n)$, mit dem sich die Yang-Baxter-Gleichung $R_{23}R_{13}R_{12} = R_{12}R_{13}R_{23}$ in der Form $(\check{R} \otimes 1)(1 \otimes \check{R})(\check{R} \otimes 1) = (1 \otimes \check{R})(\check{R} \otimes 1)(1 \otimes \check{R})$ schreiben lässt.

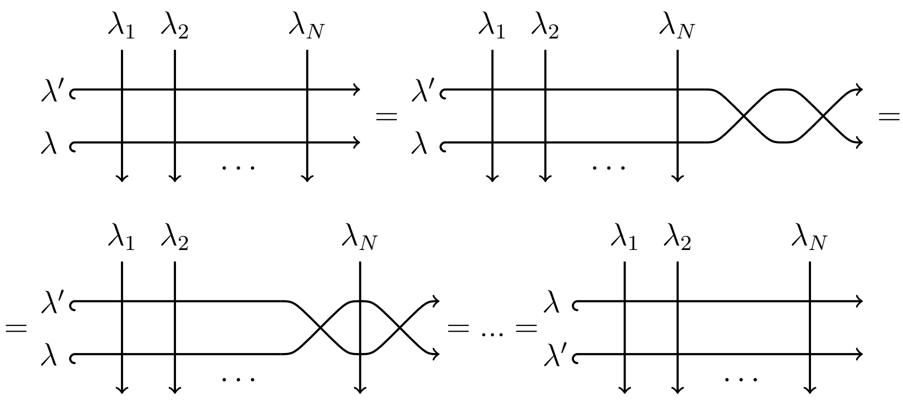


Yang-Baxter-Gleichung

Insbesondere lässt sich $\check{R}$ aus der Perspektive der Darstellungstheorie als Intertwiner der den horizontalen und vertikalen Linien zugeordneten Evaluationsmodule $V_{\lambda_n} := V_n \otimes \mathbb{C}[\lambda_n, \lambda_n^{-1}]$ und $V_{\lambda_l} := V_l \otimes \mathbb{C}[\lambda_l, \lambda_l^{-1}]$ der Quantengruppe $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ interpretieren. Die Yang-Baxter-Gleichung zusammen mit der Unitarität ergibt, dass die Spaltentransfermatrizen

$T_{col}(\lambda|\lambda_1, ..., \lambda_N) :=$


eine durch λ parametrisierte Familie von untereinander kommutierenden Matrizen bilden.



Insbesondere gilt dies für $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_N = 0$ und $T_{col}(\lambda) := T_{col}(\lambda|0, ..., 0)$, welche lokal analytisch von λ abhängt, sodass $\log(T_{col}^{-1}(0) \cdot T_{col}(\lambda))$ durch eine Potenzreihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} H_n(\xi - 1)^n$ gegeben ist. Aufgrund der Relation $H_1 = \frac{2q}{q-1}\mathcal{H}_{XXZ} + const.$ [6] bilden die Operatoren $H_n = const. \frac{d^n}{d\lambda^n} \log(T_{col}(\lambda))|_{\lambda=0}$ eine Hierarchie paarweise kommutierender Bewegungsintegrale der Spin 1/2 Heisenberg XXZ-Kette.[7] Die Äquivalenz des 6-Vertex-Modells und der Heisenberg Spin 1/2 XXZ-Kette ergibt sich aus der eins zu eins Beziehung zwischen den Eigenwerten der Operatoren H_n und den Eigenwerten von $T_{col}(\lambda)$. Die Zustandssumme $Z_{L,N}$ des 6-Vertex-Modells ist wegen $Z_{L,N} := \sum_C W(C) = \mathrm{tr}(T_{col}^L) = \Lambda_1^L(1 + \left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}\right)^L + \ldots)$ durch die Eigenwerte Λ_k von T_{col} eindeutig bestimmt.

3.2. Grundzustände und Korrelationsfunktionen

In diesem Abschnitt werden die Voraussetzungen für die Definition der Ecken-Transfermatix und der Vertex-Operatoren auf dem endlichen Gitter geschaffen. Die Wahl $-1 < q < 0$ entspricht dem sogenannten antiferromagnetischen Regime, sodass die Boltzmann-Gewichte die Bedingung $c > a + b$ erfüllen. Entsprechend gibt es genau zwei Konfigurationen $C^{(0)}$ und $C^{(1)}$, die $W(C)$ maximieren. Diese werden Grundzustandskonfigurationen genannt. Sie ergeben sich, indem man die Spin-Variablen so wählt, dass jedem Vertex das Gewicht c zugeordnet wird. Da sich mit der Zustandssumme $Z_{L,N}$ die freie Energie $F_{L,N} := -T\log(Z_{L,N})$, eine der fundamentalen physikalischen Größen des Systems, berechnen lässt, ist ihr Verhalten im Grenzwert $L, N \to \infty$ von besonderem Interesse. Es lässt sich zeigen, dass der Grenzwert $\kappa := \lim_{L,N\to\infty}(Z_{L,N})^{\frac{1}{LN}}$ endlich ist. Dieser wird „Zustandssumme pro Gitterplatz“ genannt. Da die Zustandssumme homogen in den Boltzmann-Gewichten ist, können alle Gewichte mit einem festen Skalar multipliziert werden. Sei also $c' := 1$, $b' := b/c$ und $a' := a/c$. Dann sind die Grundzustandskonfigurationen die einzigen Konfigurationen, sodass $W(C) = 1$ ist. Nun lassen sich a' und b' als kleine Parameter interpretieren, in denen $Z_{L,N}$ entwickelt werden kann. Die Bezeichnung Tieftemperaturentwicklung erklärt sich, wenn man bemerkt, dass die Boltzmann-Gewichte im physikalischen Kontext durch $a = e^{-E_a/T}$, $b = e^{-E_b/T}$ und $c = e^{-E_c/T}$ definiert sind.[8] Höhere Ordnungen der Entwicklung bezüglich a' und b' erhält man, indem man für eine feste Konfiguration C die Anzahl der Faktoren $\neq c$ zählt. Genauer lassen sich die Konfigurationen in zwei Gruppen unterteilen: Für eine gegebene Konfiguration C sei $d_i(C)$, $i = 0, 1$, die Anzahl der Kanten j, deren Spin-Variable ϵ_j sich von der i-ten Grundzustandskonfiguration unterscheidet. Dann heißt C eine Konfiguration des i-ten Grundzustandssektors, genau dann wenn die Bedingung $d_i(C) < d_{1-i}(C)$ erfüllt ist. Wegen der Symmetrie bezüglich der Umkehrung aller Spin-Variablen ist die Zustandssumme (bis zur Ordnung K) durch das zweifache der Summe aller Gewichte $W(C)$, sodass C im i-ten Grundzustandssektor liegt, gegeben. Da der Faktor 2 im Grenzwert $L, N \to \infty$ irrelevant ist, reicht es für die Entwicklung von κ bezüglich a' und b' nur einen

[6] $\mathcal{H}_{XXZ}$ ergibt sich aus Gl. (2.1) im Fall $n = 2$ und Summation über $\mathbb{Z}_N$ anstatt $\mathbb{Z}$.
[7] $\xi = e^\lambda$ und $q = e^\eta$ wie oben.
[8] Dabei seien E_a, E_b, E_c die Energien der lokalen Konfiguration und T/k_B die absolute Temberatur, wobei k_B die Boltzmann Konstante ist.

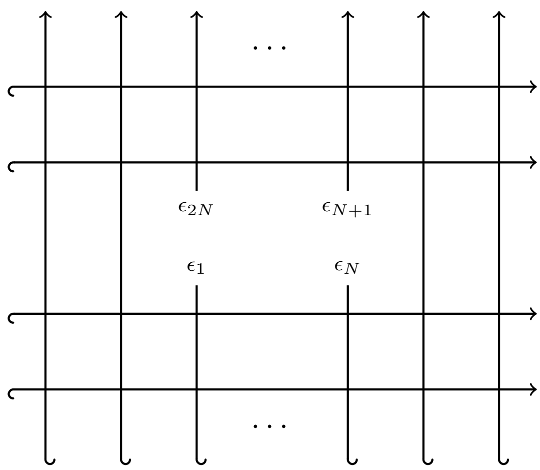
der Sektoren zu betrachten. Neben der Möglichkeit einer Tieftemperaturentwicklung sei betont, dass diese Zerlegung im Grenzwert unendlicher Gittergröße eine Beschreibung aller Konfigurationen C liefert, deren Gewicht nicht verschwindet. Das heißt in $W(C)$ sind nur endlich viele Faktoren $a, b < 1$. Sie lassen sich als endliche Anregungen über den Grundzustandskonfigurationen $C^{(i)}$ auffassen und definieren den Raum aller physikalisch relevanten Konfigurationen. Wie sich später herausstellen wird, lässt sich dieser durch eine rein mathematische Konstruktion beschreiben (siehe Abschnitt 3.4). Diese erlaubt zudem die Berechnung der Korrelationsfunktionen im i-ten Sektor und allgemeiner der reduzierten Dichtematrix des Systems. Für endliche Gittergröße lassen sich die Korrelationsfunktionen auf folgende Weise definieren: Es seien m vertikale Kanten $j_1 < \ldots < j_m$ zwischen zwei gegebenen horizontalen Linien gegeben,[9] dann ist die m-Punkt-Korrelationsfunktion durch den Ausdruck

$$\langle \epsilon_{j_1} \ldots \epsilon_{j_m} \rangle := \frac{\sum_C (-1)^{\epsilon_{j_1}(C)+\ldots+\epsilon_{j_m}(C)} W(C)}{\sum_C W(C)} \tag{3.2}$$

definiert. Die m-Punkt-Korrelationsfunktion im i-ten Grundzustandssektor ist durch entsprechende Einschränkung der Summation in Gleichung (3.2) gegeben und sei mit $\langle \epsilon_{j_1} \ldots \epsilon_{j_m} \rangle_i$ notiert. Diese ist mit den Grundzustandserwartungswerten der XXZ-Spinkette durch die Relation

$$\langle \epsilon_{j_1} \ldots \epsilon_{j_m} \rangle_i = \langle i | \sigma^z_{j_1} \ldots \sigma^z_{j_m} | i \rangle \tag{3.3}$$

verbunden, wobei $|i\rangle$ die beiden Zustände niedrigsten und zweitniedrigsten Energieeigenwertes seien. Allgemeiner wird die reduzierte Dichtematrix $G^{(N)}$ entsprechend der Abbildung



Reduzierte Dichtematrix des 6-Vertex-Modells

als N-Punkt-Korrelationsfunktion bezeichnet, wobei wie oben über die Spin-Variablen der inneren Linien summiert wird. $G^{(N)}$ ist also durch die Zustandssumme $(Z_{LN})^{\epsilon_{2N} \ldots \epsilon_{N+1}}_{\epsilon_1 \;\ldots\; \epsilon_N}$, bei der die Spin-Variablen entlang der oberen und unteren Seite des Schnittes festgehalten

[9] Dabei werden die Zahlen j_k, $k = 1, \ldots, m$, entsprechend der Nummerierung der vertikalen Linien gewählt.

werden, bestimmt.[10] Dann ist $P(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N) := \frac{(Z_{LN})^{\epsilon_1 \ldots \epsilon_N}_{\epsilon_1 \ldots \epsilon_N}}{Z_{LN}}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Konfiguration der Spin-Variablen auf den durchtrennten vertikalen Linien $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ ist. Hierbei kann in der Definition von P die Summation wie oben auf den i-ten Grundzustandssektor beschränkt werden ($=: P_i$), sodass die m-Punkt-Korrelationsfunktion $\langle \epsilon_{j_1} \ldots \epsilon_{j_m} \rangle_i$ durch

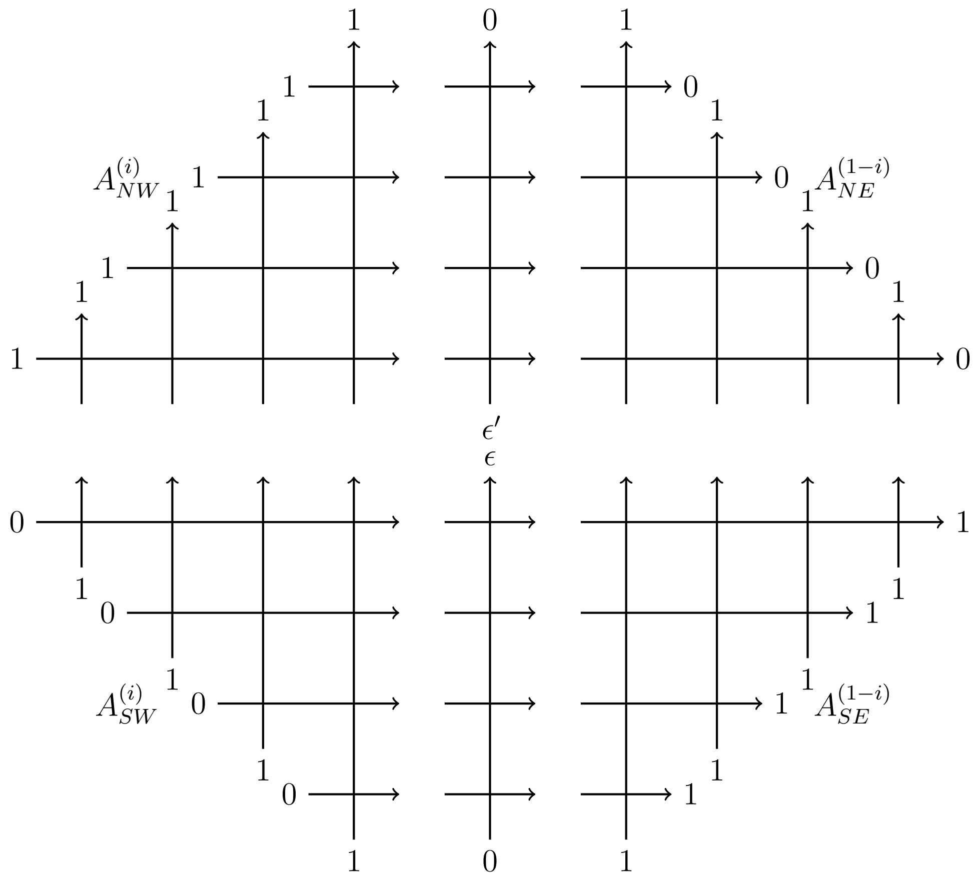
$$\langle \epsilon_{j_1} \ldots \epsilon_{j_m} \rangle_i = \sum_{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{j_m}} (-1)^{\epsilon_{j_1} + \ldots + \epsilon_{j_m}} P_i(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{j_m}) \tag{3.4}$$

gegeben ist. (Siehe [8] Kapitel 1 und 2.)

3.3. Vertex-Operatoren und Ecken-Transfermatrix

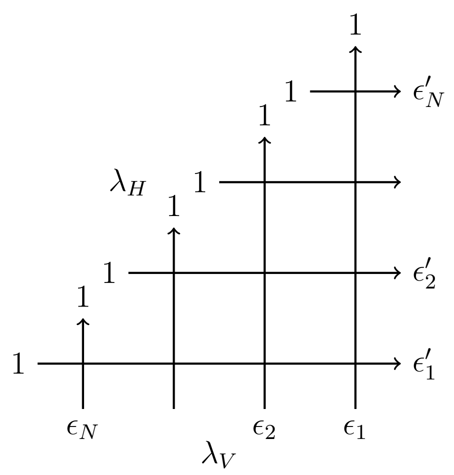
Ziel dieses Abschnittes ist die Klärung des Ursprungs der Ecken-Transfermatrix-Methode, indem die Vertex-Operatoren, sowie die Eckentransfermatrix für ein endliches, genügend großes Gitter mit gegebenen Randbedingungen eingeführt werden. Die Eigenschaften der so definierten Operatoren lassen sich unter der Annahme, dass die Randbedingungen keinen Einfluss auf die Korrelationsfunktion haben, direkt einsehen. Die Existenz dieser Operatoren im Grenzwert unendlicher Gittergröße stützt sich auf ein Argument von Baxter (siehe [9] Kapitel 13), welcher eine drastische Vereinfachung der Ecken-Transfermatrix in ihrer Tieftemperaturentwicklung entdeckte (vgl. [6] und [7]). Es sei betont, dass diese Tieftemperaturentwicklung ausschließlich in dem hier betrachteten massiven Fall Sinn ergibt, sodass die Existenz der Operatoren im Grenzwert unendlicher Gittergröße im Allgemeinen nicht garantiert werden kann. Sei innerhalb des endlichen Gitters eine vertikale Kante „0“ mit der Spin-Variablen ϵ_0 gegeben, sodass für den i-ten Grundzustand $\epsilon_0(C^{(i)}) = i$, $i = 0, 1$, ist. Die 1-Punkt-Korrelationsfunktion ist dann mit Gleichung (3.4) durch $\langle \epsilon_1 \rangle = P_i(0) - P_i(1)$ definiert. Alternativ zur Summation über den i-ten Grundzustandssektor kann diese durch Summation über alle Konfigurationen definiert werden, sodass die Spin-Variablen am Rand des Gitters entsprechend der i-ten Grundzustandskonfiguration festgehalten werden. Im Grenzwert unendlicher Gittergröße sei angenommen, dass die genaue Form des Gitters keine Rolle spielt, solange die Kante „0“ genügend weit vom Rand des Gitters entfernt ist. Um die Vertex-Operatoren und die Ecken-Transfermatrix auf dem endlichen Gitter einzuführen, ist es am einfachsten, eine Zerlegung der 1-Punkt-Korrelationsfunktion entsprechend

[10] Manchmal werden den durchtrennten Linien an der oberen und unteren Seite zusätzliche Parameter zugeordnet. Die genaue Definition der (inhomogenen) Dichtematrix ist deshalb anhand des entsprechenden Kontextes zu verstehen.



Unterteilung des Gitters am Beispiel der 1-Punkt-Funktion

zu betrachten, wobei die Form des Gitters so gewählt ist, dass die Randbedingung direkt anhand der Werte der Spin-Variablen am Rand abgelesen werden kann.[11] Seien die $2N$ horizontalen Linien des Gitters durch die Zahlen $-N+1, \ldots, N$ von unten nach oben, und die $2N+1$ vertikalen Linien von rechts nach links durch die Zahlen $-N, \ldots, N$, nummeriert. Dann ist die Ecken-Transfermatrix $\left(A^{(i)}_{NW}\right)^{\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_N}_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N}$ durch die Abbildung



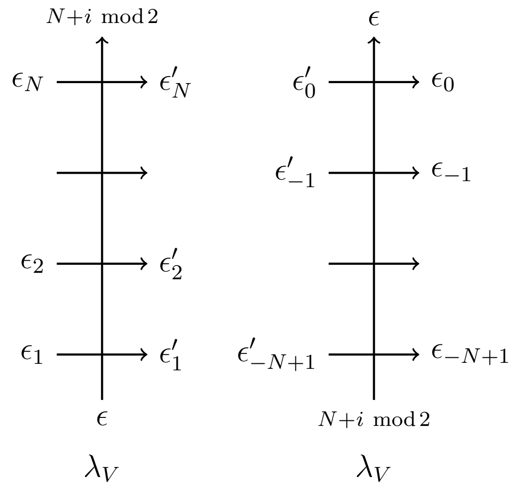
Ecken-Transfermatrix $A^{(i)}_{NW}$

[11] In dieser Abbildung ist also $i = 0$.

definiert, wobei über die Spin-Variablen der inneren Kanten summiert wird, d.h.

$$\left(A^{(i)}_{NW}\right)^{\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_N}_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N} = \sum_{\substack{\text{Innere Kanten}\\ j,k}} \prod_{l,m} R^{\epsilon'_l\epsilon'_m}_{\epsilon_l\epsilon_m}.$$

Die Spin-Variablen an den Rändern sind durch die Grundzustandskonfiguration mit $\epsilon = \epsilon' \equiv \epsilon_0(C^{(i)}) = i$ gegeben. Auf die gleiche Weise lassen sich die halben Transfermatrizen $\Phi^{(1-i,i)}_{UP\epsilon}$ und $\Phi^{(i,1-i)}_{LOW\epsilon}$ durch



Vertex-Operatoren $\Phi^{(1-i,i)}_{UP\epsilon}$ (links) und $\Phi^{(i,1-i)}_{LOW\epsilon}$ (rechts)

definieren, d.h.

$$\left(\Phi^{(1-i,i)}_{UP\epsilon}\right)^{\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_N}_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_N} = \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_{N-1}} \prod_{j=1}^{N} R^{\epsilon'_j\nu_j}_{\epsilon_j\nu_{j-1}}$$

und

$$\left(\Phi^{(i,1-i)}_{LOW\epsilon}\right)^{\epsilon'_{-N+1},\ldots,\epsilon'_0}_{\epsilon_{-N+1},\ldots,\epsilon_0} = \sum_{\nu_{-1},\ldots,\nu_{-N+1}} \prod_{j=-N+1}^{0} R^{\epsilon_j\nu_j}_{\epsilon'_j\nu_{j-1}},$$

wobei $\nu_0 := \epsilon$. Da diese auf dem unendlichen Gitter aus mathematischer Sicht den Vertex-Operatoren vom Typ I entsprechen, wird die Beizeichnung bereits für endliche Gittergröße übernommen. Die anderen Ecken-Transfermatrizen $A^{(i)}_{SW}$, $A^{(1-i)}_{SE}$ und $A^{(1-i)}_{NE}$ sind analog zu $A^{(i)}_{NW}$ definiert. Da die Operatoren alle von der Differenz $\lambda_V - \lambda_H$ abhängen, kann $\lambda := \lambda_V - \lambda_H$ gesetzt und die Eigenschaften der Operatoren in Abhängigkeit von λ erklärt werden. Sei $A^{(i)}(\lambda) := A^{(i)}_{NW}(\lambda)$ und $\Phi^{(1-i,i)}_{\epsilon}(\lambda) := \Phi^{(1-i,i)}_{UP\epsilon}(\lambda)$, dann folgt mithilfe der Crossing-Symmetrie

$$A^{(i)}_{SW}(\lambda) = A^{(i)}(\lambda - \eta + i\pi)\mathcal{R}, \tag{3.5}$$

$$A^{(1-i)}_{SE}(\lambda) = \mathcal{R}A^{(1-i)}(\lambda)\mathcal{R}, \tag{3.6}$$

$$A^{(1-i)}_{NE}(\lambda) = \mathcal{R}A^{(1-i)}(\lambda - \eta + i\pi), \tag{3.7}$$

$$\Phi^{(i,1-i)}_{LOW\epsilon}(\lambda) = \mathcal{R}\Phi^{(1-i,i)}_{1-\epsilon}(\lambda)\mathcal{R}, \tag{3.8}$$

wobei $\mathcal{R} := \sigma^x \otimes \cdots \otimes \sigma^x$ der Spinflip-Operator sei. Es stellt sich die Frage, welchen Nutzen diese Operatoren haben. Sie beantwortet sich durch Betrachtung des Grenzfalles unendlicher Gittergröße. Die wichtigste Vereinfachung ergibt sich aus Baxters Entdeckung der Eigenschaften der Ecken-Transfermatrix in diesem Grenzwert: Indem $A^{(i)}(\lambda)$ mit einem Skalar multipliziert wird, kann angenommen werden, dass „1“ der höchste Eigenwert ist. Dann lässt sich Baxters Entdeckung in der Aussage

$$\lim A^{(i)}(\lambda) = e^{-\lambda D^{(i)}}, \tag{3.9}$$

wobei $D^{(i)}$ ein nicht von λ abhängiger Operator mit diskretem äquidistantem Spektrum

$$\mathrm{Spec}(D^{(i)}) = \{0, 1, 2, \ldots\} \tag{3.10}$$

ist, zusammenfassen.[12] Sei $\mathcal{H}^{(i)}$ der Raum aufgespannt durch die Eigenvektoren der Ecken-Transfermatrix. Unter der Annahme, dass der Vertex-Operator ebenfalls gegen einen wohldefinierten Operator konvergiert, ergibt sich

$$\Phi_\epsilon^{(1-i,i)}(\lambda) : \mathcal{H}^{(i)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(1-i)}.$$

Im Gegensatz zur Ecken-Transfermatrix bildet dieser von $\mathcal{H}^{(i)}$ nach $\mathcal{H}^{(1-i)}$ ab, da sich die Randbedingungen aufgrund der zusätzlichen Spalte für die Ecken-Transfermatrix verschieben. (Siehe [8] S.45 ff.)

Die Eigenschaften der Vertex-Operatoren lassen sich mithilfe der Eigenschaften der R-Matrix, welche in Abschnitt 3.1 vorgestellt wurden, unter Vernachlässigung der Randbedingungen erklären. Diese werden im Folgenden zusammengefasst. Für eine genauere Erklärung sei auf das Buch [8] S. 50 ff. verwiesen.

1. **Charakter**

   Da das Spektrum der Ecken-Transfermatrix diskret ist, wird $\mathcal{H}^{(i)}$ zu einem $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorraum

   $$\mathcal{H}^{(i)} = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_r^{(i)}, \quad \mathcal{H}_r^{(i)} = \{v \in \mathcal{H}^{(i)} | \mathcal{D}^{(i)} v = rv\}.$$

   Die Multiplizitäten $\dim \mathcal{H}_r^{(i)}$ lassen sich mit Baxters Methode bestimmen, welcher allgemeiner das 8-Vertex-Modell betrachtet (siehe [9] Abschnitt 13.7). Damit ergibt sich

   $$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}^{(i)}}(t^{\mathcal{D}^{(i)}}) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \dim \mathcal{H}_r^{(i)} t^r = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - t^{2n-1}}, \tag{3.11}$$

   sodass insbesondere $\dim \mathcal{H}_0^{(i)} = 1$ folgt. Es gibt also einen (bis auf einen Skalar) eindeutigen Eigenvektor $=: u^{(i)}$ zum größten Eigenwert der Ecken-Transfermatrix.

[12] Dabei ist $\lambda > 0$ im hier betrachteten massiven Regime.

Die Funktion $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}^{(i)}}(t^{\mathcal{D}^{(i)}})$ nennt sich **Charakter** des graduierten Raumes $\mathcal{H}^{(i)}$ und ist die erzeugende Funktion der Multiplizitäten von $\mathcal{D}^{(i)}$.

2. **Homogenität**

$$e^{\lambda\mathcal{D}^{(1-i)}}\Phi_\epsilon^{(1-i,i)}(\lambda')e^{-\lambda\mathcal{D}^{(i)}} = \Phi_\epsilon^{(1-i,i)}(\lambda'-\lambda) \tag{3.12}$$

3. **Vertauschungsrelation**

$$\Phi_{\epsilon_2}^{(i,1-i)}(\lambda_2)\Phi_{\epsilon_1}^{(1-i,i)}(\lambda_1) = \sum_{\epsilon_1',\epsilon_2'} R(\lambda_1-\lambda_2)_{\epsilon_1\epsilon_2}^{\epsilon_1'\epsilon_2'}\Phi_{\epsilon_2'}^{(i,1-i)}(\lambda_2)\Phi_{\epsilon_1'}^{(1-i,i)}(\lambda_1) \tag{3.13}$$

4. **Normierung**
$\Phi_\epsilon^{(1-i,i)}$ kann so normiert werden, dass

$$\Phi_i^{(1-i,i)}(\lambda)u^{(i)} = u^{(1-i)} + \mathcal{O}(\lambda) \tag{3.14}$$

5. **Invertierbarkeit**
Durch Anwendung der **Crossing-Symmetrie** folgt

$$\sum_\epsilon \Phi_{1-\epsilon}^{(i,1-i)}(\lambda-\eta+i\pi)\Phi_\epsilon^{(1-i,i)}(\lambda) = g^{-1}\cdot\mathrm{id}, \tag{3.15}$$

wobei

$$g = \frac{(q^2;q^4)_\infty}{(q^4;q^4)_\infty}, \quad q = e^\eta \tag{3.16}$$

ist. Daraus ergibt sich mit der Vertauschungsrelation

$$\Phi_\epsilon^{(1-i,i)}(\lambda)\Phi_{1-\epsilon'}^{(i,1-i)}(\lambda-\eta+i\pi) = g^{-1}\delta_{\epsilon\epsilon'}\cdot\mathrm{id}. \tag{3.17}$$

6. **$\mathbb{Z}_2$-Symmetrie**
Es gibt einen linearen Isomorphismus $\nu : \mathcal{H}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(1)}$, sodass

$$\begin{gathered}\nu\mathcal{D}^{(0)} = \mathcal{D}^{(1)}\nu, \quad \nu(u^{(0)}) = u^{(1)} \text{ und} \\ \Phi_\epsilon^{(1,0)}(\lambda) = \nu\Phi_{1-\epsilon}^{(0,1)}(\lambda)\nu. \end{gathered} \tag{3.18}$$

7. **Parität** Es ist

$$\Phi_\epsilon^{(1-i,i)}(\lambda+i\pi) = (-1)^{\epsilon+i}\Phi_\epsilon^{(1,0)}(\lambda) \tag{3.19}$$

Mit den Gleichungen (3.5), (3.6) und (3.7) folgt schließlich

$$A_{SE}^{(i)}(\lambda)A_{NE}^{(i)}(\lambda) = \mathcal{R}(-q)^{\mathcal{D}^{(i)}} \tag{3.20}$$
$$A_{NW}^{(i)}(\lambda)A_{SW}^{(i)}(\lambda) = (-q)^{\mathcal{D}^{(i)}}\mathcal{R}. \tag{3.21}$$

Mit der Homogenität ergibt sich deshalb

$$P_i(\epsilon) = \mathcal{N}^{-1}\mathrm{tr}\left(A_{NW}^{(i)}(\lambda)A_{SW}^{(i)}(\lambda)\Phi_{LOW\epsilon}^{(i,1-i)}(\lambda)A_{SE}^{(1-i)}(\lambda)A_{NE}^{(1-i)}(\lambda)\Phi_{UP\epsilon}^{1-i,i}(\lambda)\right) \tag{3.22}$$
$$= \mathcal{N}^{-1}\mathrm{tr}\left((-q)^{\mathcal{D}^{(i)}}\Phi_{1-\epsilon}^{(i,1-i)}(\lambda)(-q)^{\mathcal{D}^{(1-i)}}\Phi_{\epsilon}^{1-i,i}(\lambda)\right) \tag{3.23}$$
$$= \mathcal{N}^{-1}\mathrm{tr}\left(q^{2\mathcal{D}^{(i)}}\Phi_{1-\epsilon}^{(i,1-i)}(\lambda-\eta+i\pi)\Phi_{\epsilon}^{1-i,i}(\lambda)\right), \tag{3.24}$$

wobei $\mathcal{N}$ so gewählt ist, dass $P_i(0) + P_i(1) = 1$ ist. Allgemeiner kann die Spurfunktion

$$F^{(i)}(x;\lambda)_{\epsilon_1\,\epsilon_2} = \mathrm{tr}\left(x^{\mathcal{D}^{(i)}}\Phi_{\epsilon_1}^{(i,1-i)}(\lambda_1)\Phi_{\epsilon_2}^{1-i,i}(\lambda_2)\right) \tag{3.25}$$

definiert werden, welche wegen der Homogenität nur von der Differenz $\lambda := \lambda_2 - \lambda_1$ abhängt. Dann ist

$$P_i(\epsilon) = \frac{F^{(i)}(q^2;-\eta+i\pi)_{1-\epsilon\,\epsilon}}{F^{(i)}(q^2;-\eta+i\pi)_{1-\epsilon\,\epsilon} + F^{(i)}(q^2;-\eta+i\pi)_{\epsilon\,1-\epsilon}} \tag{3.26}$$

und die reduzierte Dichtematrix $G^{(1)}$ durch

$$\left(G^{(1)}\right)_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} = F_{1-\epsilon_1\,\epsilon_2}^{(0)}(q^2;-\eta+i\pi) + F_{1-\epsilon_1\,\epsilon_2}^{(1)}(q^2;-\eta+i\pi) \tag{3.27}$$

gegeben, was die Betrachtung der 1-Punkt-Korrelationsfunktion abschließt.
Genau wie die 1-Punkt-Funktion, kann auch die N-Punkt-Korrelationsfunktion/reduzierte Dichtematrix durch die Allgemeine Spurfunktion

$$F_n^{(i)}(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)_{\epsilon_1\cdots\epsilon_n} = \mathrm{tr}\left(x^{\mathcal{D}^{(i)}}\Phi_{\epsilon_1}^{(i,i+1)}(\lambda_1)\cdots\Phi_{\epsilon_n}^{1-i,i}(\lambda_n)\right) \tag{3.28}$$

berechnet werden. Diese ist für n gerade und $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ definiert. Die oberen Indizes der Vertex-Operatoren sind modulo 2 zu lesen. Mit den Eigenschaften der Vertex-Operatoren lässt sich einerseits zeigen, dass diese die **Normalisierung**

$$\begin{aligned} &F_n^{(i)}(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_j,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_n)_{\epsilon_1\cdots\epsilon_j\,\epsilon_{j+1}\,\epsilon_n}|_{\lambda_{j+1}=\lambda_j-\eta+i\pi} \\ &\quad = \delta_{\epsilon_j\,-\epsilon_{j+1}}F_{n-2}^{(i)}(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+2},\ldots,\lambda_n)_{\epsilon_1\cdots\epsilon_{j-1}\,\epsilon_{j+2}\cdots\epsilon_n} \end{aligned} \tag{3.29}$$

erfüllt, andererseits erfüllt die Summe

$$G^{(+)}(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_n) := F_n^{(0)}(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_n) + F_n^{(1)}(x;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

die sogenannte **quantum-Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung**

$$G^{(+)}(e^{\kappa}; \lambda_1, \ldots, \lambda_j + \kappa, \ldots, \lambda_n) = A_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) G^{(+)}(e^{\kappa}; \lambda_1, \ldots, \lambda_j, \ldots, \lambda_n), \qquad (3.30)$$

wobei $x = e^{\kappa}$ und

$$\begin{aligned} A_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = & R_{j\,j+1}(\lambda_j + \kappa - \lambda_{j+1})^{-1} \cdots R_{j\,n}(\lambda_j + \kappa - \lambda_n)^{-1} \\ & \cdot R_{j\,j}(\lambda_1 - \lambda_j) \cdots R_{j-1\,j}(\lambda_{j-1} - \lambda_j). \end{aligned} \qquad (3.31)$$

ist. (Siehe [8] Kapitel 4.)

3.4. Mathematische Konstruktion

In diesem Abschnitt wird die Idee einer rein algebraischen Konstruktion der Ecken-Transfermatrix und der Vertex-Operatoren vorgestellt. Die detaillierte Konstruktion für die massive XXZ-Spinkette wird im Buch [8] ab Kapitel 5 erklärt, und kann leicht auf die Modelle höheren Spins verallgemeinert werden [10].
Um die eigentliche Idee zu erkären, ist es sinnvoll eine kurze Definition der Quantengruppe $U := U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$, des Gewichtsgitters P und der für die Erklärung wichtigen U-Module anzugeben: Betrachte die freie abelsche Gruppe erzeugt von den Objekten Λ_0, Λ_1 und δ:

$$P = \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\delta.$$

Es wird als Gewichtsgitter bezeichnet, Λ_i $(i = 0, 1)$ heißen die fundamentalen Gewichte und δ die Null-Wurzel. Definiere dann die einfachen Wurzeln α_i $(i = 0, 1)$ und ein Element ρ durch

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \delta, \quad \Lambda_1 = \Lambda_0 + \frac{\alpha_1}{2}, \quad \rho = \Lambda_0 + \Lambda_1.$$

Sei (h_0, h_1, d) eine geordnete Basis von $P^* := \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Z})$ dual zu $(\Lambda_0, \Lambda_1, \delta)$. Dann ist die symmetrische Bilinearform $(\ ,\ ) : P \times P \to \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ durch

$$\begin{aligned} &(\Lambda_0, \Lambda_0) = 0, \quad (\Lambda_0, \alpha_1) = 0, \quad (\Lambda_0, \delta) = 1, \\ &(\alpha_1, \alpha_1) = 2, \quad (\alpha_1, \delta) = 0, \quad (\delta, \delta) = 0 \end{aligned}$$

gegeben. Damit kann P^* als Teilmenge von P identifiziert werden:

$$h_0 = \alpha_0, \quad h_1 = \alpha_1, \quad d = \Lambda_0.$$

Sei q eine reelle Zahl mit $-1 < q < 0$.[13] Definiere dann für jede ganze Zahl z die „q-Zahl" durch

$$[z] = \frac{q^z - q^{-z}}{q - q^{-1}}.$$

Die Quantengruppe $U := U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_2})$ kann dann als unitäre Algebra über $\mathbb{C}$, erzeugt von den Symbolen (Generatoren) e_i, f_i $(i = 0, 1)$ und q^h $(h \in P^*)$ mit den Relationen

$$\begin{aligned}
&q^0 = 1, \quad q^h q^{h'} = q^{h+h'}, \\
&q^h e_i q^{-h} = q^{(h,\alpha_i)} e_i, \quad q^h f_i q^{-h} = q^{-(h,\alpha_i)} f_i, \\
&[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\
&e_i^3 e_j - [3] e_i^2 e_j e_i + [3] e_i e_j e_i^2 - e_j e_i^3 = 0 \quad (i \neq j), \\
&f_i^3 f_j - [3] f_i^2 f_j f_i + [3] f_i f_j f_i^2 - f_j f_i^3 = 0 \quad (i \neq j),
\end{aligned}$$

definiert werden, wobei $t_i := q^{h_i}$ ist. Sie besitzt die Hopf-Algebra-Struktur (Δ, a, ϵ):

1. **Koprodukt**

$$\Delta(q^h) = q^h \otimes q^h, \quad \Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i, \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i$$

2. **Antipode**

$$a(q^h) = q^{-h}, \quad a(e_i) = -t_i^{-1} e_i, \quad a(f_i) = -f_i t_i$$

3. **Coeins**

$$\epsilon(q^h) = 1, \quad \epsilon(e_i) = \epsilon(f_i) = 0.$$

Die Axiome für diese (Anti-)Homomorphismen lassen sich in Formeln als

$$\begin{aligned}
&\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y), \quad \epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y), \quad a(xy) = a(y)a(x), \\
&(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta, \\
&(\epsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta, \\
&m \circ (a \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \epsilon = m \circ (\mathrm{id} \otimes a) \circ \Delta
\end{aligned}$$

kurzfassen, wobei $m(x \otimes y) = xy$ die Multiplikation bezeichne. Sei $\Delta^{op} := \sigma \circ \Delta$ das oppositäre Koprodukt mit $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$. Dann folgt

$$\Delta(a(x)) = (a \otimes a)(\Delta^{op}(x)). \tag{3.32}$$

[13] Im Prinzip reicht es anzunehmen, dass q keine Einheitswurzel ist.

Außerdem ergibt sich mit dieser Definition zusätzlich die Eigenschaft

$$a^2(x) = q^{-2\rho} x q^{2\rho} \quad \forall x \in U.$$

Mit U-Modul seien im Folgenden U-links-Module gemeint. Definiere für ein U-Modul M und eine $\mathbb{C}$-Linearform ν auf $\mathbb{C}h_0 \oplus \mathbb{C}h_1 \oplus \mathbb{C}d$ den Gewichtsraum zu ν durch

$$M_\nu := \{v \in M | q^h v = q^{\langle h,\nu \rangle} v\}.^{14} \tag{3.33}$$

Ein Gewichtsmodul M ist dann ein U-Modul, welches sich als direkte Summe

$$M = \bigoplus_\nu M_\nu$$

von Gewichtsräumen schreiben lässt. Obwohl die Elemente $h \in P$ keine expliziten Elemente von U sind, lassen sie sich auf diese Weise als Operatoren auf Gewichtsmodulen interpretieren. (Siehe [8] Kapitel 3.4.)
Die Idee lässt sich nun durch Betrachtung der Level 1 Höchstgewichtsmodule erklären: Sei $\Lambda \in P$ gegeben, sodass (h_0, Λ) und (h_1, Λ) nicht negative ganze Zahlen sind. Dann existiert ein eindeutiger nichttrivialer U-Modul $V(\Lambda)$ mit den folgenden Eigenschaften.

Es gibt einen Vektor $v_\Lambda \in V(\Lambda)$, sodass
$e_i v_\Lambda = 0, \quad t_i v_\Lambda = q^{(h_i,\Lambda)} v_\Lambda, \quad f_i^{(h_i,\Lambda)+1} v_\Lambda = 0 \quad (i = 0, 1),$
$V(\Lambda) = U v_\Lambda.$

Dieser ist irreduzibel und (bis auf den Fall $\Lambda = 0$) unendlichdimensional.
$V(\Lambda)$ wird demzufolge von Vektoren der Form

$$f_{i_1} \cdots f_{i_N} v_\Lambda \quad (i_1, \ldots, i_N = 0, 1),$$

aufgespannt. Der Operator ρ wirkt auf diesen Vektoren als

$$\rho f_{i_1} \cdots f_{i_N} v_\Lambda = (-N + (\rho, \Lambda)) f_{i_1} \cdots f_{i_N} v_\Lambda,$$

sodass der Raum $V(\Lambda)$ zu einem graduierten Vektorraum wird. Die Graduierung definiert durch den Operator $\mathcal{D} := -\rho + (\rho, \Lambda)$

$$V(\Lambda) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} V(\Lambda)_r, \quad V(\Lambda)_r = \{v \in V(\lambda) | \mathcal{D} v = rv\}$$

[14] Dabei bezeichnet $\langle h, \nu \rangle = \nu(h)$ die duale Paarung von h mit ν.

heißt dann Hauptgraduierung. Der Charakter von $V(\Lambda)$ bezüglich der Hauptgraduierung ist dann in Analogie zum Fall affiner Lie-Algebren durch

$$\chi_\Lambda(t) = \mathrm{tr}_{V(\Lambda)}(t^{\mathcal{D}}) \tag{3.34}$$

definiert. $V(\Lambda)$ heißt dann Höchstgewichtsmodul zum Höchstgewicht Λ des Levels $(h_0 + h_1, \Lambda)$. Damit gibt es genau zwei Höchstgewichtsmodule des Levels 1, nämlich $V(\lambda_i)$ $(i = 0, 1)$. Die Charaktere dieser Module sind durch

$$\chi_{\Lambda_i}(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + t^{2n-1}} \tag{3.35}$$

gegeben und stimmen mit den Charakteren der Ecken-Transfermatrizen im letzten Abschnitt überein! Dies führt zu der Identifikation

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(i)} &= V(\Lambda_i), \\ \mathcal{D}^{(i)} &= -\rho + \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Weiter lassen sich für $V(\Lambda_i)$ sogenannte „Intertwiner“ definieren. Es stellt sich heraus, dass die „Intertwiner vom Typ I“ mit den Vertex-Operatoren im letzten Abschnitt identifiziert werden können. Auf diese Weise wird das „halb unendliche“ Tensorprodukt $\cdots \otimes V_{\lambda_H} \otimes V_{\lambda_H}$ mit den Randbedingungen entsprechend der i-ten Grundzustandskonfiguration auf der rechten Seite mit dem Level 1 Höchstgewichtsmodul $V(\Lambda_i)$ identifiziert. Die andere Hälfte des Tensorproduktes $V_{\lambda_H} \otimes V_{\lambda_H} \otimes \cdots$ mit den Randbedingungen entsprechend der i-ten Grundzustandskonfiguration auf der linken Seite kann schließlich durch Einführung des Anti-Automorphismus

$$b(x) = (-q)^\rho a(x) (-q)^{-\rho} \quad x \in U$$

mit dem bezüglich b dualen links-Modul $V^{*b}(\Lambda_i)$ identifiziert werden. Dieses ist ein Niedrigstgewichtsmodul vom Level -1. Schließlich kann der gesamte physikalische Zustandsraum bezüglich der i-ten bzw. j-ten Randbedingung auf der linken bzw. rechten Seite mit dem Tensorprodukt $V(\Lambda_i) \otimes V^{*b}(\Lambda_j)$ identifiziert werden. Dies führt zu der folgenden Definition:

Definition 3.1 (Physikalischer Zustandsraum).
Der Physikalische Zustandsraum $\mathcal{F}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^{*b} \\ \mathcal{H} &= V(\Lambda_0) \oplus V(\Lambda_1) \\ \mathcal{F}^{(i,j)} &= V(\Lambda_i) \otimes V(\Lambda_j)^{*b}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dies ist ein Level 0 Modul. Genauer müssen die hier auftretenden Tensorprodukte als geeignete Vervollständigungen verstanden werden, da die Vertex-Operatoren durch unendliche Summen definiert sind. (Siehe [8] Abschnitt 7.1.)

4. Kojimas Bosonisierung

In diesem Kapitel wird die von T. Kojima and S. Yamasita im Paper [1] vorgestellte Bosonisierung der Faddeev-Zamolodchikov-Algebra der $\boldsymbol{A_{n-1}^{(1)}}$-Spinkette rekapituliert und erklärt. Genauer wird eine Darstellung der Vertex Operatoren vom Typ I durch freie Bosonen angegeben. Die Terminologie für Vertex-Operatoren des Typs I und II ist im Buch [8] von M. Jimbo und T. Miwa in Kapitel 6 ausführlich erklärt. Während die Kommutation zweier Vertex-Operatoren des Typs I die R-Matrix produziert, ist die Kommutation zweier Typ II Vertex-Operatoren durch die S-Matrix bestimmt.

4.1. Vertex-Operatoren

Definition 4.1 (Faddeev-Zamolodchikov-Algebra)**.**
Die Kommutationsrelationen der Typ I Vertex-Operatoren der $\boldsymbol{A_{n-1}^{(1)}}$-Spinkette sind gegeben durch

$$\Phi^{j_1}(\beta_1)\Phi^{j_2}(\beta_2) = \sum_{k_1,k_2=0}^{n-1} R^{VV}(\beta_1-\beta_2)^{j_2 j_1}_{k_2 k_1}\Phi^{k_2}(\beta_2)\Phi^{k_1}(\beta_1). \tag{4.1}$$

Dabei ist

$$R^{VV}(\beta)e_{j_1}\otimes e_{j_2} = \sum_{k_1,k_2=0}^{n-1} R^{VV}(\beta)^{k_1 k_2}_{j_1 j_2} e_{k_1}\otimes e_{k_2}. \tag{4.2}$$

Gleichung (4.1) ist die definierende Gleichung der Faddeev-Zamolodchikov-Algebra und $\Phi^j(\beta)$ sind die Generatoren.

Definition 4.2. *(Duale Typ I Vertex-Operatoren)*
Die dualen Typ I Vertex-Operatoren erfüllen die Kommutationsrelationen

$$\Phi^*_{j_1}(\beta_1)\Phi^*_{j_2}(\beta_2) = \sum_{k_1,k_2=0}^{n-1} R^{V^*V^*}(\beta_1-\beta_2)^{k_2 k_1}_{j_2 j_1}\Phi^*_{k_2}(\beta_2)\Phi^*_{k_1}(\beta_1), \tag{4.3}$$

wobei $R^{V^*V^*}(\beta_1-\beta_2)^{k_1 k_2}_{j_1 j_2} := R^{VV}(\beta_1-\beta_2)^{j_2 j_1}_{k_2 k_1}$ *und* $R^{V^*V^*}(\beta_1-\beta_2) \in End(V^*\bigotimes V^*)$ *durch*

$$R^{V^*V^*}(\beta)e^*_{j_1}\otimes e^*_{j_2} = \sum_{k_1,k_2=0}^{n-1} R^{V^*V^*}(\beta)^{j_1 j_2}_{k_1 k_2} e^*_{k_1}\otimes e^*_{k_2} \tag{4.4}$$

gegeben ist.

Definition 4.3.
Die Typ I Vertex-Operatoren und die dualen Typ I Vertex-Operatoren erfüllen

$$\Phi^{j_1}(\beta_1)\Phi^*_{j_2}(\beta_2) = \sum_{k_1,k_2=0}^{n-1} R^{V^*V}(\beta_1-\beta_2)^{k_2 j_1}_{j_2 k_1}\Phi^*_{k_2}(\beta_2)\Phi^{k_1}(\beta_1), \tag{4.5}$$

wobei $R^{V^*V}(\beta)^{k_1k_2}_{j_1j_2}$ *die Komponenten des Operators* $R^{V^*V}(\beta) \in End(V^* \bigotimes V)$ *sind. Dieser ist definiert durch*

$$R^{V^*V}(\beta) = r^*(\beta)\bar{R}^*(\beta) \quad r^*(\beta) = \frac{S_2(-i\beta + \pi|\frac{2\pi}{n}\xi, 2\pi)S_2(i\beta + \pi + \frac{2\pi}{n}|\frac{2\pi}{n}, 2\pi)}{S_2(i\beta + \pi|\frac{2\pi}{n}\xi, 2\pi)S_2(-i\beta + \pi + \frac{2\pi}{n}\xi, 2\pi)}. \tag{4.6}$$

Die nichttrivialen Komponenten des Operators $\bar{R}^*(\beta) \in End(V^* \bigotimes V)$,

$$\bar{R}^*(\beta)e^*_{j_1} \otimes e_{j_2} = \sum_{k_1,k_2=0}^{n-1} \bar{R}^*(\beta)^{j_1k_2}_{k_1j_2} e^*_{k_1} \otimes e_{k_2}, \tag{4.7}$$

sind durch

$$\bar{R}^*(\beta)^{j\,k}_{j\,k} = 1 \qquad (j \neq k) \tag{4.8}$$

$$\bar{R}^*(\beta)^{j\,j}_{j\,j} = -\frac{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}\beta\right)}{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta + \frac{2\pi i}{n})\right)} \tag{4.9}$$

$$\bar{R}^*(\beta)^{j\,k}_{k\,j} = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{n}{2\xi}\beta}\sinh\left(\frac{\pi i}{\xi}\right)}{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta + \frac{2\pi i}{n})\right)} & (j < k) \\ \dfrac{e^{\frac{n}{2\xi}\beta}\sinh\left(\frac{\pi i}{\xi}\right)}{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta + \frac{2\pi i}{n})\right)} & (j > k), \end{cases} \tag{4.10}$$

gegeben. Insbesondere gilt für $\beta_2 = \beta_1 + \pi i$ *die Inversionsrelation*

$$\Phi^{j_1}(\beta)\Phi^*_{j_2}(\beta + \pi i) = e^{\frac{2\pi i}{n}j_1}\delta^{j_1}{}_{j_2} \qquad (j_1 \leq j_2). \tag{4.11}$$

(Siehe [1] S. 1186 f..)

4.2. Darstellung durch freie Bosonen

Typ I Vertex-Operatoren und duale Typ I Vertex-Operatoren entsprechend Abschnitt 4.1 lassen sich als Operatoren auf einem durch freie Bosefelder erzeugten Fock-Raum realisieren. Für Typ II Vertex-Operatoren wurde eine solche Darstellung bereits in dem Paper [4] von T. Miwa und Y. Takeyama gefunden. Diese weisen darauf hin, dass sich die „Bosonisierung“ im kritischen Parameterbereich $|q| = 1$ aus einem Grenzwert der elliptischen Face-Modelle [5] und [11] ergibt. Genauer betrachten Sie die Bosonisierung des massiven $A^{(1)}_{n-1}$-Face-Modells [5] und verweisen auf eine Methode, die in den Papern [2], [3] von M. Jimbo et al. und [12] von S. Lukyanov entwickelt wurde. Anhand der Paper ist das unklar, da auf der einen Seite im Fall $n = 2$ ein anderer Grenzwert des elliptischen XYZ-Modells durchgeführt wird (vgl. [3]) und auf der anderen Seite eine Bosonisierungstechnik für massive integrable Feldtheorien vorgestellt wird (vgl. [12]). Im Paper [2] wird dagegen auf direktem Wege eine Lösung der qKZ-Gleichung in Form eines Vielfachintegrals konstruiert und deren Übereinstimmung mit den Korrelationsfunktionen der XXZ-Spin-Kette in verschiedenen Grenzfällen nachgerechnet. Die Integraldarstellungen in [2] stimmen mit den Integraldarstellungen in [3] überein, sodass davon ausgegangen werden kann, dass diese Bosonisierung die korrekten Korrelationsfunktionen der XXZ-Spin-Kette liefert. Der exakte Zusammenhang zwischen den Bosonisierungen in [3] und [12] wird im Paper [3] in einer Anmerkung auf Seite 16 f. erklärt: Im Grunde lässt sich die Bosonisierung in [3] durch einen Kontinuumslimes $t := m\varepsilon$ und $a(t) := a_m/\varepsilon$ und $\varepsilon \to 0$, $m\varepsilon = const.$, erhalten. Genauer unterscheiden sich die Bosonisierungen in diesem Grenzwert durch die Anwesenheit des „zero mode“ Operators Q und einem exponentiellen Faktor. Obwohl Lukyanovs Vertex-Operatoren in diesem Grenzwert die gleichen Kommutationsrelationen erfüllen, waren Jimbo et al. nicht in der Lage, daraus die Integraldarstellungen in [2] zu rekonstruieren. Deshalb wurde der exponentielle Vorfaktor, sowie der „zero mode“ Operator Q, in der Bosonisierung von Jimbo et al. weggelassen (vgl. [3] S. 16 f.). Die Darstellung der Typ I Vertex-Operatoren im Paper von T. Kojima ergibt sich aus den folgenden Definitionen.

Definition 4.4 (Freie Bosefelder)**.**
Sei $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$*,* $t \in \mathbb{R}$*, dann sind die Bosefelder* $b_j(t)$ *definiert durch*

$$[b_j(t), b_k(t')] = -\frac{1}{t}\frac{\sinh(\frac{\pi}{n}a_{jk}t)\sinh(\frac{\pi}{n}(\xi-1)t)}{\sinh(\frac{\pi}{n}t)\sinh(\frac{\pi}{n}\xi t)}\delta(t+t'), \tag{4.12}$$

wobei a_{jk} *die Komponenten der Cartan-Matrix des Typs* A_{n-1} *seien.*[15]
Außerdem seien die „dualen“ Bosefelder $b_1^*(t)$ *und* $b_{n-1}^*(t)$ *definiert durch die Faltungen*

$$b_1^*(t) = -\sum_{j=1}^{n-1} b_j(t)\frac{\sinh(\frac{(n-j)\pi t}{n})}{\sinh(\pi t)} \tag{4.13}$$

und

$$b_{n-1}^*(t) = -\sum_{j=1}^{n-1} b_j(t)\frac{\sinh(\frac{j\pi t}{n})}{\sinh(\pi t)}. \tag{4.14}$$

Sie erfüllen die Kommutationsrelationen

$$[b_1^*(t), b_j(t')] = \delta_{j,1}\frac{1}{t}\frac{\sinh(\frac{\pi}{n}(\xi-1)t)}{\sinh(\frac{\pi}{n}\xi t)}\delta(t+t'), \tag{4.15}$$

$$[b_j(t), b_{n-1}^*(t')] = \delta_{j,n-1}\frac{1}{t}\frac{\sinh(\frac{\pi}{n}(\xi-1)t)}{\sinh(\frac{\pi}{n}\xi t)}\delta(t+t'). \tag{4.16}$$

Definition 4.5 (Fockraum $\mathcal{F}$)**.**
Sei $\mathcal{F}$ *der durch die Bosefelder* $b_j(-t)$*,* $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$*,* $t > 0$*, über dem Fock-Vakuum*

[15] Da der Ausdruck im Limes $t \to 0$ divergiert, sollte streng genommen $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gewählt werden. Auf der anderen Seite werden hier Dichten eingeführt, sodass Nullmengen in dieser Definition irrelevant sind. Da die verwendeten Integrationsmaße stetig sind, ist die Definition gerechtfertigt.

$|vac\rangle$ erzeugte Fockraum, sodass $\langle vac|vac\rangle = 1$. Das heißt

$$\mathcal{F} := \mathbb{C}[\{b_j(-t)\}_{j=1,t>0}^{n-1}]\,|vac\rangle$$

und

$$b_j(t)\,|vac\rangle = 0, \quad \forall t > 0,\ j = 1, \dots n-1.$$

Damit lassen sich formal die Ströme $U_j(\beta)$ definieren, welche für die Definition der Vertex-Operatoren benötigt werden.

Definition 4.6. *Die Operatoren $U_j(\beta)$ sind definiert durch*

$$U_j(\beta) = :\exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} b_j(t)e^{i\beta t}dt\right): \quad (1 \le j \le n-1) \tag{4.17}$$

$$U_0(\beta) = :\exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} b_1^*(t)e^{i\beta t}dt\right): \tag{4.18}$$

$$U_n(\beta) = :\exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} b_{n-1}^*(t)e^{i\beta t}dt\right):, \tag{4.19}$$

wobei $:(\dots):$ die Normalordnung von $(\dots)$ bezeichnet, d.h. alle Bosefelder $b(t)$ mit $t > 0$ („Vernichter“) in $(\dots)$ werden an allen Bosefeldern $b(t)$ mit $t < 0$ („Erzeuger“) vorbeigetauscht, sodass alle Vernichter rechts stehen.

Anmerkung 4.7. *Auch wenn die Felder $b_1^*(t)$ und $b_{n-1}^*(t)$ keine unabhängigen Bosefelder sind, ist es sinnvoll, entsprechend der Ströme U_0 und U_n, $b_0(t) := b_1^*(t)$ und $b_n(t) := b_{n-1}^*(t)$ zu definieren, sodass Gleichung (4.17) für alle $0 \le j \le n$ gilt.*

Nun lassen sich Typ I Vertex-Operatoren entsprechend der Relationen in Abschnitt 4.1 definieren. Der Beweis dieser ist im Paper [1] von T. Kojima und S. Yamasita ab Seite 1188 skizziert. Die Argumentation ist verständlich und die Vorgehensweise entspricht der Vorgehensweise in den Papern [3] und [5]. Eine detaillierte Analyse des Beweises ist mit Hilfe der in Kapitel 6 erarbeiteten Methoden möglich.

Definition 4.8 (Typ I Vertex-Operatoren)**.**
Die Bosonisierung der Typ I Vertex-Operatoren auf $\mathcal{F}$ entsprechend T. Kojima und S. Yamasita ist definiert durch

$$\begin{aligned}\Phi^j(\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha_1}{2\pi i}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha_j}{2\pi i}\,\frac{e^{\frac{n}{2\xi}(\alpha_j-\beta)}U_0(\beta)U_1(\alpha_1)\cdots U_j(\alpha_j)}{\prod_{k=1}^{j}\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_{k-1}-\alpha_k-\frac{\pi i}{n})\right)}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha_1}{2\pi i}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\alpha_j}{2\pi i}\,\frac{e^{\frac{n}{2\xi}(\alpha_j-\beta)}U_j(\alpha_j)\cdots U_1(\alpha_1)U_0(\beta)}{\prod_{k=1}^{j}\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_k-\alpha_{k-1}-\frac{\pi i}{n})\right)}\\ &(0 \le j \le n-1),\end{aligned} \tag{4.20}$$

wobei $\alpha_0 = \beta$ *ist.*

Die Bosonisierung der dualen Typ I Vertex-Operatoren ist defininiert durch

$$\begin{aligned}\Phi_j^*(\beta) &= g_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_{j+1}}{2\pi i} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_{n-1}}{2\pi i} \frac{e^{\frac{n}{2\xi}(\alpha_{j+1}-\beta)} U_{j+1}(\alpha_{j+1}) \cdots U_{n-1}(\alpha_{n-1}) U_n(\beta)}{\prod_{k=j+1}^{n-1} \sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_k - \alpha_{k+1} - \frac{\pi i}{n})\right)} \\ &= g_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_{j+1}}{2\pi i} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha_{n-1}}{2\pi i} \frac{e^{\frac{n}{2\xi}(\alpha_{j+1}-\beta)} U_n(\beta) U_{n-1}(\alpha_{n-1}) \cdots U_{j+1}(\alpha_{j+1})}{\prod_{k=j+1}^{n-1} \sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_{k+1} - \alpha_k - \frac{\pi i}{n})\right)} \\ &(0 \leq j \leq n-1), \end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei $\alpha_n = \beta$ *und* g_n *durch*

$$g_n = \left(\frac{n}{2\xi}\right)^{n-1} e^{\frac{\xi-1}{\xi}(\gamma + \log(\frac{2\pi\xi}{n}))n + \frac{\pi i}{n}(n-1)} \frac{\Gamma(1-\frac{1}{\xi})}{\sinh(\frac{\pi i}{\xi})\Gamma(\frac{1}{\xi})^{n-1}} \tag{4.22}$$

gegeben ist.

Das zweite Gleichheitszeichen in den Gleichungen (4.20) und (4.21) ergibt sich aus der Vertauschungsrelation

$$U_j(\beta_1)U_{j-1}(\beta_2) = I(\beta_1 - \beta_2)U_{j-1}(\beta_2)U_j(\beta_1), \tag{4.23}$$

wobei die Funktion I durch

$$I(\beta) = -\frac{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta - \frac{\pi i}{n})\right)}{\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(-\beta - \frac{\pi i}{n})\right)} \tag{4.24}$$

gegeben ist. (Siehe [1] S. 1187 f..)

4.3. Konstruktion einer Lösung der qKZ-Gleichungen

In diesem Abschnitt wird mithilfe der Typ I Vertex-Operatoren analog zum massiven Fall eine formale Lösung der qKZ-Gleichungen (2.3) und (2.4) vorgestellt. Sei also $\mathcal{D}$ der Gradoperator auf $\mathcal{F}$ definiert durch

$$\mathcal{D} \prod_{\substack{i\in I \\ |I|<\infty}} b_{j_i}(-t_i) \left|vac\right\rangle = \left(\sum_{i\in I} t_i\right) \prod_{i\in I} b_{j_i}(-t_i) \left|vac\right\rangle, \tag{4.25}$$

dann gilt

$$\mathrm{Ad}_{e^{\lambda\mathcal{D}}} b_j(t) := e^{\lambda\mathcal{D}} b_j(t) e^{-\lambda\mathcal{D}} = e^{-\lambda t} b_j(t) \quad \forall j = 1, \dots, n-1. \tag{4.26}$$

Deshalb folgt für die Flüsse U_j die **Homogenität**

$$\mathrm{Ad}_{e^{\lambda\mathcal{D}}} U_j(\beta) = U_j(\beta + i\lambda) \tag{4.27}$$

und damit auch für die Vertex-Operatoren Φ^j und Φ_j^*

$$\mathrm{Ad}_{e^{\lambda\mathcal{D}}}\Phi^j(\beta) = \Phi^j(\beta + i\lambda) \qquad \mathrm{Ad}_{e^{\lambda\mathcal{D}}}\Phi_j^*(\beta) = \Phi_j^*(\beta + i\lambda). \tag{4.28}$$

Nun ist für $\lambda > 0$ die Spurfunktion $G_\lambda^{(N)} \in (\bigotimes_{k=1}^N V_k^*) \bigotimes (\bigotimes_{k=1}^N V_{N+k})$

$$\begin{aligned} &G_\lambda^{(N)}(\beta_1, \dots, \beta_N|\beta_{N+1}, \dots, \beta_{2N})_{\epsilon_1\dots\epsilon_N}{}^{\epsilon_{N+1}\dots\epsilon_{2N}} \\ &:= \frac{\mathrm{tr}_{\mathcal{F}}(e^{-\lambda\mathcal{D}}\Phi_{\epsilon_1}^*(\beta_1)\cdots\Phi_{\epsilon_N}^*(\beta_N)\Phi^{\epsilon_{N+1}}(\beta_{N+1})\cdots\Phi^{\epsilon_{2N}}(\beta_{2N}))}{\mathrm{tr}_{\mathcal{F}}(e^{-\lambda\mathcal{D}})}, \quad \beta_1, \dots, \beta_{2N} \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

durch seine Komponenten bezüglich der Standardbasis $e_{\epsilon_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{\epsilon_N}^* \otimes e_{\epsilon_{N+1}} \otimes \cdots \otimes e_{\epsilon_{2N}}$ definiert, wobei $\mathrm{tr}_{\mathcal{F}}$ die Spur bezüglich $\mathcal{F}$ ist. Diese kann definiert werden, indem man $\mathcal{F}$ als Kontinuumslimes abzählbarer/diskreter Fockräume schreibt (siehe Kapitel 5). In diesem Fall reicht es, den Erwartungswert $\langle\mathcal{O}\rangle_\lambda = \frac{\mathrm{tr}_{\mathcal{F}}(e^{-\lambda\mathcal{D}}\mathcal{O})}{\mathrm{tr}_{\mathcal{F}}(e^{-\lambda\mathcal{D}})}$ eines linearen Operators $\mathcal{O}$ auf $\mathcal{F}$ im diskreten Fall geeignet umzuschreiben, sodass der Ausdruck im Kontinuumslimes unverändert bleibt (siehe Kapitel 6).
Allgemeiner bezeichne $G_\lambda^{(N)}$ die in den Argumenten $\beta_1, \dots, \beta_{2N}$ meromorphe Funktion, welche sich durch analytische Fortsetzung aus $G_\lambda^{(N)}$ entsprechend der Definition durch Gleichung (4.29) ergibt.
Mithilfe der Eigenschaft (4.28) und den Vertauschungsrelationen (4.1), (4.3) und (4.5) lässt sich zeigen, dass $G_\lambda^{(N)}$ eine Lösung der qKZ-Gleichungen (2.3) und (2.4) ist. Insbesondere folgt die Normalisierung (2.5) aus der Inversionsrelation (4.11).
Im massiven Fall lässt sich zeigen, dass die Typ I Vertex-Operatoren als Intertwiner zwischen Höchstgewichtsdarstellungen der Quantengruppe $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmt sind, sodass die Spurfunktion $G_{2\pi}^{(N)}$ der inhomogenen N-Punkt-Korrelationsfunktion der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette entspricht. Im masselosen Fall ist das nicht klar und muss beispielsweise durch Abgleich mit bekannten Resultaten verifiziert werden. Trotzdem wird die Spurfunktion $G_\lambda^{(N)}$ von T. Kojima und S. Yamasita bereits als verallgemeinerte Korrelationsfunktion bezeichnet (vgl. [1] S. 1182). Deshalb ist unter dem Begriff „Korrelationsfunktion“ im masselosen Fall erstmal eine bestimmte Lösung der qKZ-Gleichungen zu verstehen, deren Übereinstimmung mit der Korrelationsfunktion des Modells nicht unbedingt klar ist. (Siehe [1] S. 1194.)

5. Bosonisierung als Grenzwert des $\boldsymbol{A_{n-1}^{(1)}}$-Face-Modells

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass der Fockraum $\mathcal{F}$ (siehe Definition 4.5) durch einen Kontinuumslimes diskreter Fockräume konstruiert werden kann. Dafür wird die Bosonisierung des $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modells, welche im Paper [5] von M. Jimbo et al. konstruiert wurde, betrachtet. Da das Modell massiv ist, lässt sich die Konstruktion mit der Ecken-Transfermatrix-Methode begründen. Man kann zeigen, dass das $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modell in Form einer nichtlokalen Transformation äquivalent zu einer elliptischen Verallgemeinerung der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette ist. Sie ist unter dem Namen Vertex-Face-Korrespondenz bekannt und verbindet im Fall $n = 2$ das 8-Vertex-Modell, bzw. die XYZ-Spinkette als Spinketten-Analogon, mit dem $A_1^{(1)}$-Face-Modell, welches auch unter dem Namen Andrews-Baxter-Forrester Modell bekannt ist. Die Bosonisierung des Andrews-Baxter-Forrester Modells wurde als erstes im Paper [11] von S. Lukyanov und Y. Pugai vorgestellt, wobei auf das Problem hingewiesen wird, dass die Multiplizitäten der Eigenwerte des Gradoperators erst durch Einschränkung des konstruierten Fockraumes auf eine irreduzible Komponente mit denen der Ecken-Transfermatrix übereinstimmen. Dieses wird durch Betrachtung der Kohomologie des sogenannten BRST-Komplexes[16] gelöst und ermöglicht die Berechnung der Korrelationsfunktionen des Modells. Für beliebiges n ist das Problem bisher ungelöst, sodass die im Paper [5] konstruierten Typ I Vertex-Operatoren auf einem „zu großen“ Fockraum definiert sind. Dennoch lässt sich vermuten, dass die Typ I Vertex-Operatoren der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette entsprechend Definition 4.8 durch einen nicht-elliptischen Grenzwert, für den das $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modell zur kritischen[17] $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette korrespondiert, aus den Typ I Vertex-Operatoren des $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modells rekonstruiert werden können. Die Möglichkeit eines solchen Grenzwertes wurde bereits in dem Paper [4] von T. Miwa und Y. Takeyama auf Seite 3 angesprochen, aber nicht genauer ausgeführt. Deshalb soll der Fockraum $\mathcal{F}$ durch einen Kontinuumslimes aus den gleichen Oszillatoren, die für die Bosonisierung des $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modells verwendet wurden, konstruiert werden. Dieser lässt sich durch einen entsprechenden Grenzwert, indem die Boltzmann-Gewichte der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette[18] mit den Boltzmann Gewichten des $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modells[19] übereinstimmen, motivieren.

5.1. Korrespondenz der Boltzmann-Gewichte

Für $0 < x < 1$, $0 < v < 1$ und $r \geq n + 2$ ganzzahlig definiere $[v] := x^{\frac{v^2}{r}-v}\Theta_{x^{2r}}(x^{2v})$, wobei $\Theta_q(z)$ durch das Dreifachprodukt

$$\Theta_q(z) := (z; q)_\infty (qz^{-1}; q)_\infty (q; q)_\infty, \tag{5.1}$$

$$(z; q_1, \ldots, q_m)_\infty := \prod_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} (1 - q_1^{i_1} \cdots q_m^{i_m} z) \tag{5.2}$$

[16]Siehe [11] für die genaue Definition.
[17]Das heißt $q = 1$.
[18]Gegeben durch die R-Matrix in Definition 2.1.
[19]Siehe [5] auf Seite 4.

gegeben ist. Durch Vergleich mit der Produktdarstellung

$$\Theta_1(z;q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin(\pi z) \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^{2m})(1-2\cos(2\pi z)q^{2m} + q^{4m}) \tag{5.3}$$

der jacobischen Thetafunktion $\Theta_1(z;q)$ ergibt sich die Relation

$$\Theta_{q^2}(e^{2\pi i z}) = -ie^{i\pi z} q^{-\frac{1}{4}} \Theta_1(z;q). \tag{5.4}$$

Nach Anwendung der Transformationsformel

$$-i(-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{\tau} i z^2\right) \Theta_1(z; e^{\pi i \tau}) = \Theta_1\left(\frac{z}{\tau}; e^{-\frac{\pi i}{\tau}}\right) \tag{5.5}$$

folgt

$$[v] = -\left(\frac{-\log(x) r}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\log(x) r}{4}} \Theta_1\left(-\frac{v}{r}; e^{-\frac{\pi i}{\log(x) r}}\right). \tag{5.6}$$

Seien $\epsilon_\mu \,(1 \leq \mu \leq n)$ die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem inneren Produkt $\langle \epsilon_\mu, \epsilon_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}$. Sei $\bar{\epsilon}_\mu = \epsilon_\mu - \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^n \epsilon_\nu$, dann ist das Gewichtsgitter des Typs $A_{n-1}^{(1)}$ durch $P := \sum_{\nu=1}^n \mathbb{Z}\bar{\epsilon}_\nu$ definiert. Sei $a \in P$, dann können die Boltzmann-Gewichte des $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modells

$$W\left(\begin{matrix} a+2\bar{\epsilon}_\mu & a+\bar{\epsilon}_\mu \\ a+\bar{\epsilon}_\mu & a \end{matrix}\middle| v\right) \Big/ r_1(v) = 1 \tag{5.7}$$

$$W\left(\begin{matrix} a+\bar{\epsilon}_\mu+\bar{\epsilon}_\nu & a+\bar{\epsilon}_\mu \\ a+\bar{\epsilon}_\nu & a \end{matrix}\middle| v\right) \Big/ r_1(v) = \frac{[v][a_{\mu\nu}-1]}{[v-1][a_{\mu\nu}]} \tag{5.8}$$

$$W\left(\begin{matrix} a+\bar{\epsilon}_\mu+\bar{\epsilon}_\nu & a+\bar{\epsilon}_\nu \\ a+\bar{\epsilon}_\nu & a \end{matrix}\middle| v\right) \Big/ r_1(v) = \frac{[v-a_{\mu\nu}][1]}{[v-1][a_{\mu\nu}]} \tag{5.9}$$

$$a_{\mu\nu} := (\langle a, \epsilon_\mu \rangle - \mu) - (\langle a, \epsilon_\nu \rangle - \nu) \tag{5.10}$$

(vgl. [5] S. 4) durch die Eichtransformation

$$W\begin{pmatrix} n_4 & n_3 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \to W\begin{pmatrix} n_4 & n_3 \\ n_1 & n_2 \end{pmatrix} \sqrt{\frac{[|a(n_3-n_1)+1|]}{[|a(n_3-n_1)-1|]}} \tag{5.11}$$

$$a(\epsilon_\mu - \epsilon_\nu) := a_{\mu\nu} \tag{5.12}$$

symmetrisiert werden. Schließlich lässt sich mithilfe von Gleichung (5.6) leicht überprüfen, dass sich aus (5.7), (5.8) und (5.9) im Grenzwert $x \nearrow 1$ und $a_{\mu\nu} \to \mathrm{sgn}(a_{\mu\nu}) i\infty$ die Boltzmann-Gewichte (2.8), (2.9) und (2.10) der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette ergeben.[20] Genauer ergibt sich Gleichung (2.9) mit einem zusätzlichen negativen Vorzeichen, welches allerdings

[20] An dieser Stelle sei auf die Vertex-Face-Korrespondenz verwiesen, welche hier nicht genauer ausgeführt wird.

durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einem linearen Operator der Form $1 \otimes e^{\frac{i\pi\sigma}{2}} \in \mathrm{End}\,(V \bigotimes V)$ korrigiert werden kann.
Dies folgt direkt aus

$$\lim_{x \nearrow 1} \frac{[v]}{[v-1]} = \frac{\sin(\frac{\pi}{r} v)}{\sin(\frac{\pi}{r}(v-1))} \tag{5.13}$$

$$\lim_{\substack{x \nearrow 1 \\ a_{\mu\nu} \to \mathrm{sgn}(a_{\mu\nu}) i\infty}} \frac{[v - a_{\mu\nu}][1]}{[v-1][a_{\mu\nu}]} = -e^{\mathrm{sgn}(a_{\mu\nu}) \frac{\pi i v}{r}} \frac{\sin(\frac{\pi}{r})}{\sin(\frac{\pi}{r}(v-1))} \tag{5.14}$$

und der Identifikation der Parameter $v \mathrel{\hat{=}} \frac{i\beta n}{2\pi}$ und $r \mathrel{\hat{=}} \xi$.

5.2. Ein Kontinuumslimes diskreter Fockräume

Im Folgenden wird gezeigt, wie der Fockraum $\mathcal{F}$ durch einen dem Grenzwert in Abschnitt 5.1 entsprechenden Kontinuumslimes konstruiert werden kann. Danach wird ein möglicher Grenzwert angesprochen, in dem die Typ I Vertex-Operatoren der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette den Typ I Vertex-Operatoren des $A_1^{(1)}$-Face-Modells entsprechen. Leider ergibt sich aus dieser Betrachtung insbesondere Aufgrund der fehlenden Analyse des BRST-Komplexes keine Aussage über die Korrespondenz der Spurfunktion (4.29) und der physikalischen Korrelationsfunktion der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette.

Seien die bosonischen Oszillatoren β_m^j, $(1 \leq j \leq n-1, m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ durch ihre Kommutatoren

$$[\beta_m^j, \beta_{m'}^k] = \begin{cases} m \frac{[(n-1)m]_x}{[nm]_x} \frac{[(r-1)m]_x}{[rm]_x} \delta_{m+m',0}, & (j = k) \\ -m x^{\mathrm{sgn}(j-k)nm} \frac{[m]_x}{[nm]_x} \frac{[(r-1)m]_x}{[rm]_x} \delta_{m+m',0}, & (j \neq k) \end{cases} \tag{5.15}$$

$$[a]_x := \frac{x^a - x^{-a}}{x - x^{-1}} \tag{5.16}$$

definiert. Sei außerdem β_m^n durch die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{n} x^{-2jm} \beta_m^j = 0 \tag{5.17}$$

gegeben. Dann gilt Gleichung (5.15) für alle $1 \leq j, k \leq n$ (vgl. [5] S. 10).
Es lässt sich leicht nachrechnen, dass die Bosonen definiert durch

$$\alpha_m^j := (\beta_m^{j+1} - \beta_m^j) x^{-jm} \frac{\pi}{-\log(x) nm} \qquad (1 \leq j \leq n-1) \tag{5.18}$$

die Kommutationsrelationen

$$[\alpha_m^j, \alpha_{m'}^k] = -\frac{\pi^2}{(-\log(x)n)^2 m} \frac{[a_{jk} m]_x}{[m]_x} \frac{[(r-1)m]}{[rm]} \delta_{m+m',0} \tag{5.19}$$

erfüllen, wobei a_{jk} die Komponenten der Cartan-Matrix des Typs A_{n-1} seien.
Sei das Integral über die reelle Achse durch den Grenzwert der Riemann-Summen

$$\lim_{x\nearrow 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{-\log(x)n}{\pi} =: \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t \tag{5.20}$$

definiert. Eine Funktion $f(m;x)$ heißt dann integrierbar im Grenzwert $x\nearrow 1$, falls der Ausdruck

$$\lim_{x\nearrow 1}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{-\log(x)n}{\pi}f(m;x) =: \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t \tag{5.21}$$

endlich ist. Andernfalls kann $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t$ analog zu $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}1\mathrm{d}t$ als „Integraloperator“ zu $f(m;x)$ definiert werden und

$$f(t)\doteq \underset{x\nearrow 1}{\mathcal{D}}(f(m;x))(t) \tag{5.22}$$

heißt formale Distribution/Dichte des Integraloperators $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t$. Falls der Grenzwert $f(t):=\lim\limits_{x\nearrow 1}f(\lfloor\frac{\pi t}{-\log(x)n}\rfloor;x)$ für alle $t\in\mathbb{R}$ existiert und $f(m;x)$ integrierbar ist, dann entspricht $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t$ dem üblichen uneigentlichen Riemann-Integral der Funktion $f(t)$.
Unter diesen Voraussetzungen lassen sich die Bosedichten

$$b_j(t):=\underset{x\nearrow 1}{\mathcal{D}}(\alpha^j_m)(t) \tag{5.23}$$

definieren. Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[b_j(t),b_k(t')]=-\frac{1}{t}\frac{\sinh(\frac{\pi}{n}a_{jk}t)\sinh(\frac{\pi}{n}(r-1)t)}{\sinh(\frac{\pi}{n}t)\sinh(\frac{\pi}{n}rt)}\delta(t+t'). \tag{5.24}$$

Nach der Identifikation $r\mathrel{\hat{=}}\xi$ entsprechend Abschnitt 5.1 können die Bosedichten (5.23) mit den Bosedichten des Fockraumes $\mathcal{F}$ entsprechend Definition 4.4 gleichgesetzt werden.

Die Ströme und Vertex-Operatoren des $A^{(1)}_{n-1}$-Face-Modells werden von Jimbo et al. (vgl. [5]) auf der direkten Summe der Fockräume $\mathcal{F}_{l,k}$, welche von den Moden β^j_{-m} $(m>0)$ über den Fock-Vakua $|l,k\rangle$ erzeugt werden, definiert. Außerdem werden zwei sogenannte „zero mode“ Operatoren P_α und Q_α eingeführt, welche als Orts- und Impulsoperatoren interpretiert werden können. Das heißt $|l,k\rangle$ ist ein Eigenvektor zu P_α und $e^{i(a_1Q_m+a_2Q_n)}|0,0\rangle=|m,n\rangle$, mit geeigneten reellen Zahlen $(a_1\operatorname{mod}\mathbb{Z})\neq(a_2\operatorname{mod}\mathbb{Z})$. Bisher wurde gezeigt, dass $\mathcal{F}$ im Grenzwert $x\nearrow 1$ mit einem der Fockräume $\mathcal{F}_{l,k}$ identifiziert werden kann. Dies ist konsistent mit der Aussage, dass der „Grundzustand“ der $A^{(1)}_{n-1}$-Spinkette eindeutig ist. Dies wird im Fall $n=2$ im Paper [2] auf Seite 2 angesprochen, allerdings nicht weiter ausgeführt. Tatsächlich ergeben sich die Ströme $U_j(\beta)$ $(0\leq j\leq n)$ im Grenzwert $x\nearrow 1$ aus den Strömen $\eta_1(v)$, $\xi_j(v)$ $(1\leq j\leq n-1)$ und $\eta_{n-1}(v)$ nach Identifikation der Parameter $v\mathrel{\hat{=}}\frac{i\beta n}{2\pi}$ und $r\mathrel{\hat{=}}\xi$ entsprechend Abschnitt 5.1, wenn man den von den „zero mode“ Operatoren abhängigen Vorfaktor vernachlässigt. Das heißt es gilt

$$\lim_{x\nearrow 1}\eta_1(v)\mathrel{\hat{=}}U_0(\beta) \tag{5.25}$$

$$\lim_{x\nearrow 1}\xi_j(v)\mathrel{\hat{=}}U_j(\beta) \quad (1\le j\le n-1) \tag{5.26}$$

$$\lim_{x\nearrow 1}\eta_{n-1}(v)\mathrel{\hat{=}}U_n(\beta), \tag{5.27}$$

wobei $\hat{=}$ anhand der vorangegangenen Erklärungen zu verstehen ist. Definiere die Funktion

$$f(v,w):=\frac{[v+\frac{1}{2}-w]}{[v-\frac{1}{2}]}, \tag{5.28}$$

dann sind die Typ I Vertex-Operatoren ϕ_μ, $\mu=1,\ldots,n$, des $A^{(1)}_{n-1}$-Face-Modells durch

$$\begin{aligned}\phi^\mu(v) &= \oint\prod_{j=1}^{\mu-1}\frac{\mathrm{d}z_j}{2\pi i z_j}\eta_1(v)\xi_1(v_1)\cdots\xi_{\mu-1}(v_{\mu-1})\prod_{j=1}^{\mu-1}f(v_j-v_{j-1},\pi_{j\mu}), \\ z_j &:= x^{2v_j}, \quad v_0:=v,\end{aligned} \tag{5.29}$$

gegeben, wobei der Operator $\pi_{\mu\nu}$ auf $\mathcal{F}_{l,k}$ als ganze Zahl $\langle\epsilon_\mu-\epsilon_\nu, rl-(r-1)k\rangle$ wirkt. Die Integrationswege sind dabei einfache geschlossene Wege um den Ursprung, sodass die Bedingung

$$x|z_{j-1}<|z_j|<x^{-1}|z_{j-1}| \quad (j=1,\ldots,\mu-1) \tag{5.30}$$

erfüllt ist (vgl. [5] S. 11). Die Konturen seien im Folgenden die Kreise mit $|z_j|=x^{2v}$. Sei l,k fest, dann ergeben sich die Typ I Vertex-Operatoren der $A^{(1)}_{n-1}$-Spinkette aus der Betrachtung des formalen Grenzwertes $\langle\epsilon_\mu-\epsilon_\nu, rl-(r-1)k\rangle\to i\infty$ [21] und $x\nearrow 1$, wobei die Parameter nach wie vor durch die Relationen $v\mathrel{\hat{=}}\frac{i\beta n}{2\pi}$ und $r\mathrel{\hat{=}}\xi$ miteinander verbunden sind. Bevor dieser Grenzwert durchgeführt werden kann, ist es sinnvoll die Substitution $z_j=e^{2v_j\log(x)}\mathrel{\hat{=}}e^{i\alpha_j\frac{\log(x)n}{\pi}}$ durchzuführen, sodass

$$\oint\frac{\mathrm{d}z_j}{2\pi i z_j}\to\int_{\frac{\pi^2}{\log(x)n}}^{\frac{\pi^2}{-\log(x)n}}\frac{\mathrm{d}\alpha_j}{2\pi i}\frac{-i\log(x)n}{\pi} \tag{5.31}$$

und die Polstellen bei $z_j=x^{1+2rk}z_{j-1}, x^{-1-2rk}z_{j-1}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ in der α_j-Ebene unabhängig von x Abstand $\ge\frac{\pi}{n}$ zur reellen Achse haben (vgl. [5] S. 12). Außerdem kann an den Grenzwert die Bedingung gestellt werden, dass sich die Faktoren $\frac{-i\log(x)n}{\pi}$ und $e^{-i\langle\epsilon_\mu-\epsilon_\nu,rl-(r-1)k\rangle}$ aufheben, d.h. $\frac{-i\log(x)n}{\pi}e^{-i\langle\epsilon_\mu-\epsilon_\nu,rl-(r-1)k\rangle}\to const.\neq 0$. Auf diese Weise ergeben sich die Vertex-Operatoren $\Phi^j(\beta)$ aus den Vertex-Operatoren $\phi^{j+1}(v)$.[22] Schließlich ergeben sich auch die dualen Vertex-Operatoren $\Phi^*_j(\beta)$ auf die gleiche Weise aus den dualen Vertex-Operatoren $\phi^*_{j+1}(v)$.

[21] Dieser Grenzwert ist vom selben Typ, wie der Grenzwert $a_{\mu\nu}\to\mathrm{sgn}(a_{\mu\nu})i\infty$ in Abschnitt 5.1!

[22] Der Index $j+1$ wurde dabei im Vergleich zum Paper [5] nach oben geschrieben.

6. Berechnung von Spuren über bosonische Fockräume

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich Erwartungswerte der Form $\langle\mathcal{O}\rangle_\lambda = \frac{\mathrm{tr}_\mathcal{F}(e^{-\lambda\mathcal{D}}\mathcal{O})}{\mathrm{tr}_\mathcal{F}(e^{-\lambda\mathcal{D}})}$ berechnen lassen. Die grundlegende Idee ist im Paper [13] von Clavelli und Shapiro auf Seite 522 skizziert. Da Ihre Methode sich leicht auf mehrere Modi erweitern lässt, reicht es einen durch einen einzigen Modus $b_j(-t) =: b(-t)$, $t > 0$, über dem Fock-Vakuum $|vac\rangle_b$ erzeugten Fockraum $\mathcal{F}_b$ zu betrachten. Der Kommutator zweier Bosefelder sei durch $[b(t), b(t')] = A(t)\delta(t + t')$ gegeben, wobei $A(-t) = -A(t)$ gelte. Die Berechnung von $\langle\mathcal{O}\rangle_\lambda$ reduziert sich auf die folgende Schlüsselaussage:

Lemma 6.1 (Reduktion auf Vakuumerwartungswerte)**.**
Sei $\mathcal{O}$ ein linearer Operator auf $\mathcal{F}_b$. Sei $\mathcal{F}_a$ eine Kopie von $\mathcal{F}_b$ erzeugt durch die Bosefelder $a(t)$, $t > 0$, über $|vac\rangle_a$, d.h. $[a(t), a(t')] = A(t)\delta(t+t')\ \forall\, t, t' \in \mathbb{R}$ und sei $\mathcal{F}_b \bigotimes \mathcal{F}_a$ der durch die Felder $b(t) \equiv b(t) \otimes 1$ und $a(t) \equiv 1 \otimes a(t)$ erzeugte Fockraum, sodass der Kommutator zwischen $a(t)$ und $b(t')$, $t, t' \in \mathbb{R}$, verschwindet.
Definiere dann

$$\tilde{b}(t) := \frac{b(t)}{1 - e^{-\lambda t}} + a(-t) \qquad \tilde{b}(-t) := \frac{a(t)}{e^{\lambda t} - 1} + b(-t) \quad (t > 0). \tag{6.1}$$

Sei $\tilde{\mathcal{O}}$ der lineare Operator auf $\mathcal{F}_b \bigotimes \mathcal{F}_a$, der sich durch die Ersetzung $b(t) \to \tilde{b}(t)$ aus $\mathcal{O}$ ergibt. Dann entspricht der Erwartungswert $\langle\mathcal{O}\rangle_\lambda$ dem Vakuumerwartungswert von $\tilde{\mathcal{O}}$, d.h.

$$\frac{tr_\mathcal{F}(e^{-\lambda\mathcal{D}}\mathcal{O})}{tr_\mathcal{F}(e^{-\lambda\mathcal{D}})} = \langle\widetilde{vac}|\, \tilde{\mathcal{O}}\, |\widetilde{vac}\rangle\,, \tag{6.2}$$

wobei $|\widetilde{vac}\rangle = |vac\rangle_b \otimes |vac\rangle_a$.

Beweis. Siehe Anhang B. □

Die Anwendung des Lemmas auf zwei Bosefelder $b_j(t)$ und $b_k(t')$ ergibt

$$\langle b_j(t)b_k(t')\rangle_\lambda = \frac{1}{1 - e^{-\lambda t}}[b_j(t)b_k(t')], \tag{6.3}$$

was sich durch direktes Nachrechnen leicht überprüfen lässt. Allgemeiner kann mit dem Lemma der Korrelator zweier Ströme berechnet werden. Zudem ergibt sich eine Art Wick-Theorem, wobei nur die Ströme $U_j(\beta_1)$ und $U_k(\beta_2)$ mit $(|j - k| \bmod n) \leq 1$ einen nichttrivialen Korrelator ($\neq 1$) besitzen.

Proposition 6.2 (Korrelatoren zweier und beliebig vieler Ströme)**.**

1. *Der Korrelator zweier Ströme U_j und U_k ergibt sich mit Lemma 6.1 zu*

$$\begin{aligned}\langle U_j(\beta_1)U_k(\beta_2)\rangle_\lambda &= \frac{tr_\mathcal{F}\left(e^{-\lambda\mathcal{D}} : \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} b_j(t)e^{i\beta_1 t}dt\right) : : \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} b_k(t)e^{i\beta_2 t}dt\right) :\right)}{tr_\mathcal{F}(e^{-\lambda\mathcal{D}})} \\ &= const.\exp\left(\int_0^\infty A_{jk}(t)\frac{\cosh(\frac{\lambda t}{2} + i(\beta_1 - \beta_2)t)}{\sinh(\frac{\lambda t}{2})}dt\right),\end{aligned} \tag{6.4}$$

wobei const. $= \exp(\int_0^\infty \frac{A_{jj}(t)+A_{kk}(t)}{e^{\lambda t}-1}dt)$ *und* $[b_j(t), b_k(t')] =: A_{jk}(t)\delta(t+t')\ \forall j,k$ *ist.*[23]

2. *Der Korrelator beliebig vieler Ströme ist gegeben durch*

$$
\begin{aligned}
&\langle U_{j_1}(\beta_1)\cdots U_{j_N}(\beta_N)\rangle_\lambda \\
&= \frac{tr_{\mathcal{F}}\left(e^{-\lambda\mathcal{D}} :\exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} b_{j_1}(t)e^{i\beta_1 t}dt\right): \ \cdots \ :\exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} b_{j_N}(t)e^{i\beta_N t}dt\right):\right)}{tr_{\mathcal{F}}(e^{-\lambda\mathcal{D}})} \\
&= const. \prod_{1\le k<l\le N} \exp\left(\int_0^\infty A_{j_k j_l}(t)\frac{\cosh(\frac{\lambda t}{2}+i(\beta_{j_k}-\beta_{j_l})t)}{\sinh(\frac{\lambda t}{2})}dt\right),
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

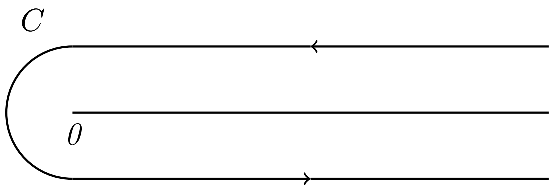
wobei const. nicht von $\beta_1,\ldots,\beta_N$ *abhängt.*

Beweis. Siehe Anhang B. □

Anmerkung 6.3. *An diesem Punkt stellt sich die Frage der Wohldefiniertheit der Ausdrücke in den Gleichungen (6.4) und (6.5), da die Funktionen* $A_{jk}(t)$ *bei* $t=0$ *einen Pol erster Ordnung haben. Da ausschließlich meromorphe Funktionen integriert werden, lässt sich das Problem lösen, indem Integrale über die positive reelle Achse als Kurvenintegrale*

$$\int_0^\infty f(t)\,dt := \int_C f(t)\frac{\log(-t)}{2\pi i}\,dt \tag{6.6}$$

definiert werden, wobei die Kontur C gegeben durch



so gewählt wird, dass f keine Polstellen in $C \cup Int(C)\backslash\mathbb{R}_+$ *hat.*[24] *Die Linien parallel zur reellen Achse sind dabei ins Unendliche fortzusetzen.*
Auf dieselbe Weise lassen sich Integrale über die negative reelle Achse nach dem Variablenwechsel $t \to -t$ *definieren.*

Mit Proposition 6.2 kann schließlich die Spurfunktion $G_\lambda^{(N)}(\beta_1,\ldots,\beta_N|\beta_{N+1},\ldots,\beta_{2N})$ entsprechend Gleichung (4.29) berechnet werden. Hierfür ist es sinnvoll, zuerst die analytischen Fortsetzungen der Zweipunktfunktionen definiert durch die Integrale (6.4) zu bestimmen.

[23] $A_{jk}(-t) = -A_{jk}(t)$ wie oben.
[24] Dabei bezeichnet Int(C) das Innere von C.

Proposition 6.4 (Zweipunktfunktionen - Ströme).
Die analytischen Fortsetzungen der Zweipunktfunktionen (6.4) sind gegeben durch

$$\langle U_0(\beta_1)U_0(\beta_2)\rangle_\lambda = \langle U_n(\beta_1)U_n(\beta_2)\rangle_\lambda = const.E_\lambda(\beta_1-\beta_2), \tag{6.7}$$

$$\langle U_0(\beta_1)U_n(\beta_2)\rangle_\lambda = \langle U_n(\beta_1)U_0(\beta_2)\rangle_\lambda = const.E^*_\lambda(\beta_1-\beta_2), \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}&\langle U_{j-1}(\beta_1)U_j(\beta_2)\rangle_\lambda = \langle U_j(\beta_1)U_{j-1}(\beta_2)\rangle_\lambda \\ &= const.\varphi(\beta_1-\beta_2)\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta_1-\beta_2-\frac{\pi i}{n})\right) \quad (1\le j\le n),\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\langle U_j(\beta_1)U_j(\beta_2)\rangle_\lambda = const.\psi(\beta_1-\beta_2)\frac{\sinh(\frac{\pi}{\lambda}(\beta_1-\beta_2))}{\sinh(\frac{n}{2\xi}(\beta_1-\beta_2-\frac{2\pi i}{n}))} \quad (1\le j\le n-1), \tag{6.10}$$

wobei die Funktionen E_λ, E^*_λ, φ und ψ durch

$$E_\lambda(\beta) := \frac{S_3(-i\beta+\frac{2\pi}{n})S_3(i\beta+\frac{2\pi}{n}+\lambda)}{S_3(-i\beta+\frac{2\pi}{n}\xi)S_3(i\beta+\frac{2\pi}{n}\xi+\lambda)}, \tag{6.11}$$

$$E^*_\lambda(\beta) := \frac{S_3(-i\beta+\pi)S_3(i\beta+\pi+\lambda)}{S_3(-i\beta+\pi+\frac{2\pi}{n})S_3(i\beta+\pi+\frac{2\pi}{n}+\lambda)}, \tag{6.12}$$

$$\varphi(\beta) := \frac{1}{S_2(i\beta+\frac{\pi}{n})S_2(-i\beta+\frac{\pi}{n})}, \tag{6.13}$$

$$\psi(\beta) := S_2(i\beta+\frac{2\pi}{n})S_2(i\beta-\frac{2\pi}{n}) \tag{6.14}$$

definiert sind. Hierbei wurde $S_3(\beta) := S_3(\beta|2\pi,\lambda,\frac{2\pi}{n}\xi)$ und $S_2(\beta) := S_2(\beta|\lambda,\frac{2\pi}{n}\xi)$ gesetzt (siehe Anhang A). Wie oben bezeichnet const. einen nicht von β abhängigen Vorfaktor (vgl. [1] S.1195).

Beweis. Die Ausdrücke lassen sich mithilfe der Eigenschaften der Multi-Sinusfunktionen verifizieren, welche in Anhang A aufgelistet sind. □

Anmerkung 6.5. *Entsprechend der Referenz in Proposition 6.4 sind die Zweipunktfunktionen bereits im Paper [1] auf Seite 1195 angegeben. Beim Nachrechnen dieser Relationen stellt sich heraus, dass die Relation für den Korrelator $\langle U_{j-1}(\beta_1)U_j(\beta_2)\rangle_\lambda$ in [1] falsch ist. Zudem ist auch der Korrelator $\langle U_j(\beta_1)U_j(\beta_2)\rangle_\lambda$ fehlerhaft, da neben einem Tippfehler die Parameter $\omega_1 = \lambda$ und $\omega_2 = \frac{2\pi}{n}\xi$ vertauscht worden sind. Aus diesem Grund wird Gleichung (6.9) in Anhang B bewiesen. Es sei darauf hingewiesen, dass diese Relationen im Fall $n = 2$ bereits im Paper [3] von M. Jimbo et al. auf Seite 19 zu finden sind, wobei in diesem Fall $E_\lambda \equiv E^*_\lambda$ ist.*

Mit den Vertex-Operatoren gegeben durch die Gleichungen (4.20) und (4.21) ergibt sich der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
&G_\lambda^{(N)}(\beta_1,\ldots,\beta_N|\beta_{N+1},\ldots,\beta_{2N})_{\epsilon_1\ldots\epsilon_N}{}^{\epsilon_{N+1}\ldots\epsilon_{2N}} = (g_n)^N e^{-\frac{n}{2\xi}\sum_{k=1}^{2N}\beta_k} \\
&\cdot \prod_{k=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_{\epsilon_k+1}^{(k)}}{2\pi i}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_{n-1}^{(k)}}{2\pi i}\frac{e^{\frac{n}{2\xi}\alpha_{\epsilon_k+1}^{(k)}}}{\prod_{l=\epsilon_k+1}^{n-1}\sinh(\frac{n}{2\xi}(\alpha_{l+1}^{(k)}-\alpha_l^{(k)}-\frac{\pi i}{n}))}\right) \\
&\cdot \prod_{k=N+1}^{2N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_1^{(k)}}{2\pi i}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_{\epsilon_k}^{(k)}}{2\pi i}\frac{e^{\frac{n}{2\xi}\alpha_{\epsilon_k}^{(k)}}}{\prod_{l=1}^{\epsilon_k}\sinh(\frac{n}{2\xi}(\alpha_l^{(k)}-\alpha_{l-1}^{(k)}-\frac{\pi i}{n}))}\right) \\
&\cdot \langle U_n(\beta_1)U_{n-1}(\alpha_{n-1}^{(1)})\cdots U_{\epsilon_1+1}(\alpha_{\epsilon_1+1}^{(1)})\cdots \\
&\cdot U_n(\beta_N)U_{n-1}(\alpha_{n-1}^{(N)})\cdots U_{\epsilon_N+1}(\alpha_{\epsilon_N+1}^{(N)}) \\
&\cdot U_{\epsilon_{N+1}}(\alpha_{\epsilon_{N+1}}^{(N+1)})\cdots U_1(\alpha_1^{(N+1)})U_0(\beta_{N+1})\cdots \\
&\cdot U_{\epsilon_{2N}}(\alpha_{\epsilon_{2N}}^{(2N)})\cdots U_1(\alpha_1^{(2N)})U_0(\beta_{2N})\rangle_\lambda
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

für die Spurfunktion $G_\lambda^{(N)}(\beta_1,\ldots,\beta_N|\beta_{N+1},\ldots,\beta_{2N})$ entsprechend Gleichung (4.29), wobei $\alpha_n^{(k)} = \alpha_0^{(k)} = \beta_k$ für alle $k = 1,\ldots,2N$ gesetzt wurde. Der Korrelator unter dem Integral lässt sich im Prinzip mit Proposition 6.2 und den Relationen in Proposition 6.4 berechnen, ist aber im Allgemeinen etwas unhandlich. Deshalb ist die allgemeine Formel für $G_\lambda^{(N)}(\beta_1,\ldots,\beta_N|\beta_{N+1},\ldots,\beta_{2N})$ im Anhang C angegeben. Im Spezialfall der 1-Punkt-Spurfunktion und $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$ vereinfacht sich die Formel zu

$$
\begin{aligned}
&G_\lambda^{(1)}(\beta_1|\beta_2)_\epsilon{}^\epsilon = const.\, E_\lambda^*(\beta_1-\beta_2)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{2\pi i}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_{n-1}}{2\pi i} \\
&\cdot e^{\frac{n}{2\xi}(\alpha_\epsilon+\alpha_{\epsilon+1}-(\beta_1+\beta_2))}\sinh\left(\frac{n}{2\xi}\left(\alpha_{\epsilon+1}-\alpha_\epsilon-\frac{\pi i}{n}\right)\right)\prod_{k=1}^{n}\varphi(\alpha_k-\alpha_{k-1}),
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

wobei $\alpha_n = \beta_1$ und $\alpha_0 = \beta_2$ gesetzt wurde. Die Korrektur der Ergebnisse des Papers [1] von T. Kojima und S. Yamasita ist also durch Gleichung (6.16) und Gleichung (C.1) gegeben, wobei sich mit Gleichung (C.1) sogar die Spurfunktionen mit $\epsilon_k \neq \epsilon_{2N+1-k}$ $(k = 1,\ldots,N)$ berechnen lassen.

7. Vergleich der Korrelationsfunktionen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit im Fall $n = 2$ mit den Ergebnissen von Jimbo et al. [3] verglichen. Eine ausführliche numerische Analyse der Gleichungen (6.16) und (C.1) steht noch offen. Wie sich herausstellt, unterscheiden sich die Ergebnisse in einem Detail. Dies wurde bereits am Anfang von Abschnitt 4.2 angesprochen. Sei im Folgenden also $n = 2$. Dann unterscheidet sich der Vertex-Operator, gegeben durch die Gleichung (4.20) und $j = 1$, von dem Vertex-Operator $Z'_{-}(\beta)$ im Paper [3] nur um den Faktor $e^{\frac{n}{2\xi}(\alpha-\beta)} = e^{\frac{1}{\xi}(\alpha-\beta)}$ unter dem Integral. Der duale Vertex-Operator gegeben durch Gleichung (4.21) und $j = 1$ stimmt mit dem Vertex Operator Z'_{+} überein. Hierbei ist die Identifikation der Parameter entsprechend $\xi_{Kojima} = \xi_{Jimbo} + 1$ vorzunehmen. Deshalb unterscheiden sich die Spurfunktionen $G_{\lambda}^{(N)}(\beta_1, \dots, \beta_N|\beta_{N+1}, \dots, \beta_{2N})_{1\dots1}{}^{1\dots1}|_{n=2}$ und $G(\beta_1, \cdots, \beta_n, \beta_{n+1}, \cdots, \beta_{2N})_{+\cdots+-\cdots-}$, welche im Paper [3] auf Seite 18 durch Gleichung (4.9) gegeben ist, um den Faktor $e^{\frac{1}{\xi}(\sum_{k=1}^{N}\alpha_{N+k}-\beta_{N+k})}$ unter dem Integral. Die Vertex-Operatoren in den Gleichungen (4.20) und (4.21) entsprechen im Prinzip einem Grenzfall der Vertex-Operatoren, welche von S. Lukyanov im Paper [12] eingeführt wurden. Hierzu ist auf Seite 16 f. von Jimbo et al. eine Anmerkung zu finden, in der dieser Unterschied erklärt wird. Da Sie nicht in der Lage waren, die Formeln für die physikalischen Korrelationsfunktionen, welche Sie in dem Paper [2] gefunden hatten, mit den Operatoren von S. Lukyanov zu rekonstruieren, haben Sie die Faktoren weggelassen. Diese Faktoren könnten im Grunde auch für beliebigen Rang ($= n - 1$) weggelassen werden, sodass die Spurfunktionen in den Gleichungen (6.16) und (C.1) zumindest im Fall $n = 2$ ein bekanntes Resultat reproduzieren. Der Beweis der Relationen in Abschnitt 4.1 steht für diese modifizierten Operatoren ebenfalls noch offen, sollte aber analog zum skizzenhaften Beweis dieser Relationen, im Paper [1] von T. Kojima und S. Yamasita, für die nicht modifizierten Operatoren durchführbar sein.

8. Zusammenfassung

Die Ziele dieser Arbeit, die Durchführung eines Grenzwertes ausgehend vom elliptischen $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modell, die Erarbeitung der Methoden zur Berechnung von Spuren über Produkte von Vertex-Operatoren, die Überprüfung der von T. Kojima und S. Yamasita konstruierten Integraldarstellungen und der Vergleich dieser Integraldarstellungen mit bekannten Resultaten konnten weitestgehend erreicht werden.
Leider lässt sich aus dem Grenzwert des $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modells, genauer dem Kontinuumslimes, indem sich die Vertex-Operatoren von T. Kojima und S. Yamasita ergeben, keine genauere Aussage über die Interpretation der mit diesen Vertex-Operatoren konstruierten Spurfunktionen $G_\lambda^{(N)}$ treffen, welche zumindest eine Lösung der qKZ-Gleichungen (2.3) und (2.4) darstellen.
Die Methoden zur Berechnung von Spuren über Produkte von Vertex-Operatoren wurden vollständig erarbeitet, sodass die Resultate des Papers [1] von T. Kojima und S. Yamasita überprüft werden konnten. Es stellt sich heraus, dass die Berechnungen von T. Kojima und S. Yamasita fehlerhaft sind. Genauer wurde eine der Relationen für die Korrelatoren zweier Ströme falsch berechnet, sodass die angegebenen Integralgleichungen für die Spurfunktionen ebenfalls falsch sind. Die Relation wurde deshalb in Form eines kurzen Beweises korrigiert und die Integralgleichungen berichtigt. Anschließend konnte eine allgemeine Integralgleichung für die Spurfunktion $G_\lambda^{(N)}$ angegeben werden, mit der sich auch die Einträge außerhalb der Diagonalen $\epsilon_k = \epsilon_{2N+1-k}$ $(k = 1, \dots, N)$ berechnen lassen.
Der Vergleich der (korrigierten) Resultate des Papers [1] und der Resultate des Papers [3] im Fall $n = 2$ zeigt, dass sich die Vertex-Operatoren, sowie die Integralgleichungen für die Spurfunktion $G_\lambda^{(N)}$ von Vertex-Operatoren und Integralgleichungen im Paper [3] in einem Detail unterscheiden. Dieses wurde von M. Jimbo et al. bereits in Form einer Anmerkung thematisiert. Da die Vertex-Operatoren von M. Jimbo et al. die Integralgleichungen des Papers [2] reproduzieren, führt dies zu der Vermutung, dass die Spurfunktion $G_\lambda^{(N)}$ nicht mit der physikalischen Korrelationsfunktion der $A_{n-1}^{(1)}$-Spinkette übereinstimmt. Eine numerische Überprüfung dieser Vermutung und die Betrachtung geeigneter Grenzfälle wurde bisher nicht durchgeführt.
Schließlich wurde auf eine mögliche Modifikation der Vertex-Operatoren analog zur Anmerkung von M. Jimbo et al. hingewiesen. Eine numerische Analyse, sowie der Beweis der Vertauschungs- und Inversionsrelationen für die modifizierten Vertex-Operatoren wären deshalb mögliche nächste Schritte. Zuletzt könnte auch eine genauere Analyse der Bosonisierung des $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modells zu einem Aussagekräftigerem Kontinuumslimes beitragen. Hierzu wäre für den Fall $n = 2$ ein Vergleich der Ergebnisse der Paper [3] und [11] ein erster Anhaltspunkt.

Literatur

[1] T. Kojima und S. Yamasita. “The critical $A^{(1)}_{n-1}$ chain”. In: *J. Phys. A: Math. Gen. 34 1181* (2001).

[2] M. Jimbo und T. Miwa. “Quantum KZ equation with $|q| = 1$ and correlation functions of the XXZ model in the gapless regime”. In: *J. Phys. A: Math. Gen. 29 2923-58* (1996).

[3] M. Jimbo, H. Konno und T. Miwa. “Massless XXZ model and degeneration of the elliptic algebra $A_{Q,P}(\widehat{\mathrm{SL}_2})$”. In: *arXiv:hep-th/96010079* (1996).

[4] T. Miwa und Y. Takeyama. “The integral formula for the solutions of the quantum Knizhnik-Zamolodchikov equation associated with $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ for $|q| = 1$”. In: *arXiv:hep-th/9606095v2* (1999).

[5] M. Jimbo u. a. “Bosonization of the vertex operators for the $A^{(1)}_{n-1}$ face model”. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 29.20 (1996), S. 6595–6616.

[6] R J. Baxter. “Corner transfer matrices of the eight-vertex model. I.” In: *Journal of Statistical Physics* (1976).

[7] R. J. Baxter. “Corner transfer matrices of the eight-vertex model. II. The Ising model case”. In: *Journal of Statistical Physics* 17 (Juli 1977).

[8] M. Jimbo und T. Miwa. *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models*. Kyoto, Japan: Kyoto University, 1994.

[9] R. J. Baxter. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. London: Academic Press, 1982.

[10] Y. Koyama. “Staggered polarization of vertex models with $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$-symmetry”. In: *Comm. Math. Phys.* 164.2 (1994), S. 277–291.

[11] Y. P. S. Lukyanov. “Multi-point Local Height Probabilities in the Integrable RSOS Model”. In: *Nucl.Phys. B473 (1996) 631-658* (1996).

[12] S. L. Lukyanov. “Free field representation for massive integrable models”. In: *Communications in Mathematical Physics* 167 (1995), S. 183–226.

[13] L. Clavelli und J. A. Shapiro. “Pomeron factorization in general dual models”. In: *Nucl. Phys.* B57 (1973), S. 490–535.

[14] E. W. Barnes und A. R. Forsyth. “VI. The theory of the double gamma function”. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 196.274-286 (1901), S. 265–387.

[15] E W. Barnes. “On the theory of the multiple Gamma functions”. In: *Trans. Camb. Philos. Soc.* 19 (Jan. 1904).

[16] T. Shintani. “On Kronecker limit formula for real quadratic fields”. In: *Proc. Japan Acad.* 52.7 (1976), S. 355–358.

[17] N Kurokawa. “On the generalization of the sine function”. In: *Technical Rep. Tsuda Univ* 4 (1992), S. 1–25.

A. Multi-Gammafunktionen

Ursprünglich wurden die Multi-Gamma- und Multi-Sinusfunktionen von Barnes ([14] und [15]), Shintani ([16]) und Kurokawa ([17]) eingeführt. Im Folgenden soll ein Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der Multi-Gamma- und Multi-Sinusfunktionen gegeben werden (vgl. [2] S. 17 ff.). Sei $\underline{\omega} := (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ ein r-Tupel komplexer Zahlen mit positivem Realteil und sei $\underline{n} \cdot \underline{\omega} := n_1\omega_1 + \ldots + n_r\omega_r$ ($\underline{n} = (n_1, \ldots, n_r)$) und $|\underline{\omega}| := \omega_1 + \ldots + \omega_r$. Dann kann man folgende verallgemeinerte Funktionen definieren:

Multi-Hurwitz-Zeta-Funktion

$$\zeta_r(s, x|\underline{\omega}) := \sum_{n_1,\ldots,n_r \geq 0} (\underline{n} \cdot \underline{\omega} + x)^{-s} \tag{A.1}$$

Multi-Gammafunktion

$$\Gamma_r(x|\underline{\omega}) := \exp(\frac{\partial \zeta_r}{\partial s}(0, x|\underline{\omega})) \tag{A.2}$$

Multi-Digamma-Funktion

$$\psi_r(x|\underline{\omega}) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(\Gamma_r(x|\underline{\omega})) \tag{A.3}$$

Multi-Sinusfunktion

$$S_r(x|\underline{\omega}) = \Gamma_r(x|\underline{\omega})^{-1}\Gamma_r(|\underline{\omega}| - x|\underline{\omega})^{(-1)^r} \tag{A.4}$$

Multi-Bernulli-Polynome

$$\frac{t^r e^{xt}}{\prod_{i=1}^r (e^{\omega_i t} - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B_{r,n}(x|\underline{\omega}) \tag{A.5}$$

Für $r = 1$ sind diese mit den üblichen Funktionen durch die Relationen

$$\begin{aligned}
\zeta_1(s, x|\omega_1) &= \omega_1^{-s}\zeta(s, \frac{x}{\omega_1}), \\
\Gamma_1(x|\omega_1) &= \omega_1^{\frac{x}{\omega_1} - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{x}{\omega_1})}{\sqrt{2\pi}}, \\
\psi_1(x|\omega_1) &= \frac{1}{\omega_1} \left(\psi(\frac{x}{\omega_1}) + \log(\omega_1) \right), \\
S_1(x|\omega_1) &= 2\sin(\frac{\pi x}{\omega_1})
\end{aligned}$$

verknüpft. Ihre grundlegenden Eigenschaften sind gegeben durch:

Funktionalgleichungen Sei $\underline{\omega}(i) := (\omega_1, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_r)$.

$$\zeta_r(s, x + \omega_i|\underline{\omega}) - \zeta_r(s, x|\underline{\omega}) = \zeta_{r-1}(s, x|\underline{\omega}(i)), \tag{A.6}$$

$$\frac{\Gamma_r(x + \omega_i|\underline{\omega})}{\Gamma_r(x|\underline{\omega})} = \frac{1}{\Gamma_{r-1}(x|\underline{\omega}(i))}, \tag{A.7}$$

$$\frac{S_r(x + \omega_i|\underline{\omega})}{S_r(x|\underline{\omega})} = \frac{1}{S_{r-1}(x|\underline{\omega}(i))}, \tag{A.8}$$

$$B_{r,n}(x + \omega_i|\underline{\omega}) - B_{r,n}(x|\underline{\omega}) = nB_{r-1,n-1}(x, \underline{\omega}(i)). \tag{A.9}$$

Analytizität $\zeta_r(s, x|\underline{\omega})$ lässt sich als Funktion von s meromorph auf die komplexe Ebene fortsetzen mit den einfachen Polstellen bei $s = 1, \ldots, r$ und für $n \in \mathbb{Z}$ gelten die Gleichungen

$$\zeta_r(n, x|\underline{\omega}) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\psi_r^{(n-1)}(x|\underline{\omega}) \quad (n > r),$$

$$\zeta_r(n, x|\underline{\omega}) = (-1)^r \frac{n!}{(n+r)!} B_{r,n+r}(x|\underline{\omega}) \quad (n \geq 0),$$

$$\lim_{s\to n} \zeta_r(s, x|\underline{\omega}) = (-1)^{n-r} \frac{B_{r,r-n}(x|\underline{\omega})}{(n-1)!(r-n)!} \quad (r \geq n \geq 1).$$

$\Gamma_r(x|\underline{\omega})^{-1}$ ist bezüglich x eine ganze Funktion und $\Gamma_r(x|\underline{\omega})$ ist meromorph mit Polstellen bei $x = \underline{n} \cdot \underline{\omega}$ $(n_1, \ldots, n_r \leq 0)$. $S_r(x|\underline{\omega})$ ist bezüglich x eine ganze Funktion, falls r ungerade ist. $S_r(x|\underline{\omega})$ ist meromorph, falls r gerade ist. Die Null- und Polstellen sind gegeben durch

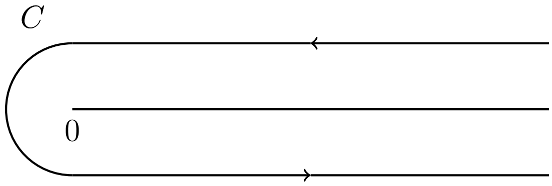
r : ungerade	Nullstellen bei $x = \underline{n} \cdot \underline{\omega}$ $\quad (n_1, \ldots, n_r \geq 1$ oder $n_1, \ldots, n_r \leq 0)$,
r : gerade	Nullstellen bei $x = \underline{n} \cdot \underline{\omega}$ $\quad (n_1, \ldots, n_r \leq 0)$,
	Polstellen bei $x = \underline{n} \cdot \underline{\omega}$ $\quad (n_1, \ldots, n_r \geq 1)$.

Alle Null- und Polstellen sind einfach, solange die $\mathbf{n} \cdot \underline{\omega}$ disjunkt sind.

Integraldarstellungen Sei $\Re(x) > 0$, dann gelten die Integraldarstellungen

$$\zeta_r(s, x|\underline{\omega}) = -\Gamma(1-s) \int_C \frac{e^{-xt}(-t)^{s-1}}{\prod_{i=1}^r (1 - e^{-\omega_i t})} \frac{\mathrm{dt}}{2\pi i},$$
$$\log(\Gamma_r(x|\underline{\omega})) = \gamma \frac{(-1)^r}{r!} B_{r,r}(x|\underline{\omega}) + \int_C \frac{e^{-xt}\log(-t)}{\prod_{i=1}^r (1 - e^{-\omega_i t})} \frac{\mathrm{dt}}{2\pi i t},$$
$$\psi_r(x|\underline{\omega}) = \gamma \frac{(-1)^r}{r!} B'_{r,r}(x|\underline{\omega}) - \int_C \frac{e^{-xt}\log(-t)}{\prod_{i=1}^r (1 - e^{-\omega_i t})} \frac{\mathrm{dt}}{2\pi i},$$

wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante, log der Hauptzweig des Logarithmus, Γ die Gammafunktion und die Kontur C durch



gegeben ist. Die Linien parallel zur reellen Achse sind dabei ins Unendliche fortzusetzen.[25]

Insbesondere gelten im Fall $r = 2$ die Formeln

$$\log(S_2(x|\underline{\omega})) = \int_C \frac{\sinh((x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2})t)}{2\sinh(\frac{\omega_1 t}{2})\sinh(\frac{\omega_2 t}{2})}\log(-t)\frac{\mathrm{d}t}{2\pi i t}, \quad (0 < \Re(x) < \omega_1 + \omega_2)$$

$$\frac{S_2(x + \omega_1|\underline{\omega})}{S_2(x|\underline{\omega})} = \frac{1}{2\sin(\frac{\pi x}{\omega_2})}, \tag{A.10}$$

$$S_2(x|\underline{\omega})S_2(-x|\underline{\omega}) = -4\sin(\frac{\pi x}{\omega_1})\sin(\frac{\pi x}{\omega_2}), \tag{A.11}$$

$$S_2(x|\underline{\omega}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1\omega_2}}x + O(x^2) \quad (x \to 0), \tag{A.12}$$

$$S_2(\omega_1|\underline{\omega}) = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}, \quad S_2(\frac{\omega_1}{2}|\underline{\omega}) = \sqrt{2}, \quad S_2(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}|\underline{\omega}) = 1.$$

Im Grenzwert $x \to \infty$ $(\pm\Im(x) > 0)$ hat man die Asymptotik

$$\log(S_2(x|\underline{\omega})) = \pm\pi i\left(\frac{x^2}{2\omega_1\omega_2} - \frac{\omega_1+\omega_2}{2\omega_1\omega_2}x - \frac{1}{12}(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} + 3)\right) + o(1),$$

$$\log(S_2(a + x|\underline{\omega})S_2(a - x|\underline{\omega})) = \pm\pi i\frac{2a - \omega_1 - \omega_2}{\omega_1\omega_2}x + o(1). \tag{A.13}$$

[25] Wegen Cauchys Integralsatz kann C außerhalb der positiven reellen Achse beliebig deformiert werden.

B. Beweise

Beweis von Lemma 6.1.
Entsprechend der Bemerkung am Ende von Kapitel 4 reicht es, die Aussage für einen durch abzählbar viele Bosonen erzeugten Fockraum zu zeigen. Spezieller sei $\mathcal{F}_b$ der durch das Boson b^+ vom Grad 1 ($\equiv b_{-1}$) über $|0\rangle_b$ erzeugte Fockraum, sodass ${}_b\langle vac|vac\rangle_b = 1$. Der Kommutator sei durch $[b, b^+] = 1$ gegeben. Sei $\mathcal{O}(b, b^+)$ ein linearer Operator auf $\mathcal{F}_b$ und sei $\mathcal{D} = b^+b$ der Gradoperator des Fockraumes $\mathcal{F}_b$. Sei $\mathcal{F}_a$ eine Kopie von $\mathcal{F}_b$ erzeugt durch das Boson a^+ über $|vac\rangle_a$. Auf $\mathcal{F}_b \bigotimes \mathcal{F}_a$ seien dann die Bosonen b^+, b, a^+, a, durch ihre natürliche Erweiterung auf das Tensorprodukt gegeben, i.e. $b^+ \equiv b^+ \otimes 1$. Dann wird $\mathcal{F}_b \bigotimes \mathcal{F}_a$ von b^+ und a^+ über $|\widetilde{vac}\rangle := |vac\rangle_b \otimes |vac\rangle_a$ erzeugt. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}_{\mathcal{F}_b}(e^{-\lambda D}\mathcal{O}(b, b^+)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle\widetilde{vac}|\, b^n e^{-\lambda D}\mathcal{O}(b, b^+)(b^+)^n \,|\widetilde{vac}\rangle \\
&\overset{1.}{=} \langle\widetilde{vac}|\, e^{ab} e^{-\lambda D}\mathcal{O}(b, b^+) e^{a^+b^+} \,|\widetilde{vac}\rangle \\
&= \langle\widetilde{vac}|\, e^{ab} e^{-\lambda D} e^{a^+b^+}\mathcal{O}(b + a^+, b^+) \,|\widetilde{vac}\rangle \\
&\overset{2.}{=} \langle\widetilde{vac}|\, e^{-\lambda D} e^{e^{-\lambda}ab} e^{a^+b^+}\mathcal{O}(b + a^+, b^+) \,|\widetilde{vac}\rangle \\
&= \langle\widetilde{vac}|\, e^{e^{-\lambda}ab} e^{a^+b^+}\mathcal{O}(b + a^+, b^+) \,|\widetilde{vac}\rangle \\
&\overset{3.}{=} \langle\widetilde{vac}|\, e^{a^+b^+} e^{e^{-\lambda}(a+b^+)(b+a^+)}\mathcal{O}(b + a^+, b^+) \,|\widetilde{vac}\rangle \\
&\overset{4.}{=} \langle\widetilde{vac}|\, e^{e^{-\lambda}(a+b^+)(b+a^+)}\mathcal{O}(b + a^+, b^+) \,|\widetilde{vac}\rangle \\
&\overset{5.}{=} \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \langle\widetilde{vac}|\, e^{\frac{e^{-\lambda}ab}{1-e^{-\lambda}}}\mathcal{O}(b + a^+, b^+) \,|\widetilde{vac}\rangle \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \langle\widetilde{vac}|\, \mathcal{O}\left(\frac{b}{1 - e^{-\lambda}} + a^+, b^+ + \frac{a}{e^{\lambda} - 1}\right) e^{\frac{e^{-\lambda}ab}{1-e^{-\lambda}}} \,|\widetilde{vac}\rangle \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \langle\widetilde{vac}|\, \mathcal{O}\left(\frac{b}{1 - e^{-\lambda}} + a^+, b^+ + \frac{a}{e^{\lambda} - 1}\right) |\widetilde{vac}\rangle \,. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

Dabei wurde 1. $\langle\widetilde{vac}|\, a^n(a^+)^n \,|\widetilde{vac}\rangle = n!$ und 2. die Homogenität des Gradoperators $e^{\lambda D} b e^{-\lambda D} = e^{-\lambda} b$ verwendet, 5. ist noch zu zeigen. Anstelle von 3. und 4. kann auch direkt die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (BCH) angewendet werden.
Wegen $\mathrm{tr}_{\mathcal{F}_b}(e^{-\lambda D}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda n} = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}$ ist deshalb

$$\langle\mathcal{O}(b, b^+)\rangle_\lambda = \frac{\mathrm{tr}_{\mathcal{F}_b}(e^{-\lambda\mathcal{D}}\mathcal{O})}{\mathrm{tr}_{\mathcal{F}_b}(e^{-\lambda\mathcal{D}})} = \langle\widetilde{vac}|\, \mathcal{O}\left(\frac{b}{1 - e^{-\lambda}} + a^+, b^+ + \frac{a}{e^{\lambda} - 1}\right) |\widetilde{vac}\rangle \,. \qquad \text{(B.2)}$$

Die Rechnung für ein Boson $b(-t)$ vom Grad $t > 0$ verläuft analog.
Sei also

$$\tilde{b}(t) := \frac{b(t)}{1 - e^{-\lambda t}} + a(-t) \qquad \tilde{b}(-t) := \frac{a(t)}{e^{\lambda t} - 1} + b(-t) \quad (t > 0), \qquad \text{(B.3)}$$

dann folgt

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{F}_{b(-t)}}(e^{-\lambda D}\mathcal{O}(b(t),b(-t))) = \frac{1}{1-e^{-\lambda t}}\langle\widetilde{vac}|\,\mathcal{O}\left(\tilde{b}(t),\tilde{b}(-t)\right)|\widetilde{vac}\rangle\,, \tag{B.4}$$

sodass ebenfalls

$$\langle\mathcal{O}(b(t),b(-t))\rangle_\lambda = \langle\widetilde{vac}|\,\mathcal{O}\left(\tilde{b}(t),\tilde{b}(-t)\right)|\widetilde{vac}\rangle \tag{B.5}$$

folgt. Damit ist Lemma 6.1 bis auf die Aussage 3. bewiesen.
Zu 3.: Es ist

$$\begin{aligned}
&\langle\widetilde{vac}|\,e^{e^{-\lambda}(a+b^+)(b+a^+)} = \langle\widetilde{vac}|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{-\lambda}(a+b^+)(b+a^+))^k}{k!}\\
&= \langle\widetilde{vac}|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-k\lambda}a^k(b+a^+)^k}{k!}\\
&\overset{6.}{=} \langle\widetilde{vac}|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-k\lambda}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(b+a^+)^{k-j}(a^k)^{(j)}\\
&= \langle\widetilde{vac}|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-k\lambda}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}b^{k-j}(a^k)^{(j)}\\
&= \langle\widetilde{vac}|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-k\lambda}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{k!}{(k-j)!}(ba)^{k-j}\\
&= \langle\widetilde{vac}|\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(ba)^{k-j}}{(k-j)!}e^{-k\lambda}\\
&\overset{\substack{k=\alpha+\beta\\ j=\alpha}}{=} \langle\widetilde{vac}|\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{(ba)^{\beta}}{(\beta)!}e^{-(\alpha+\beta)\lambda}\\
&= \langle\widetilde{vac}|\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{(e^{-\lambda}ba)^{\beta}}{(\beta)!}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{\alpha}e^{-\alpha\lambda}\\
&= \langle\widetilde{vac}|\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{(e^{-\lambda}ba)^{\beta}}{(\beta)!}\frac{1}{\beta!}\frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}x^\beta}\sum_{\alpha=0}^{\infty}e^{-\alpha\lambda}\\
&= \langle\widetilde{vac}|\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{(e^{-\lambda}ba)^{\beta}}{(\beta)!}\frac{1}{\beta!}\frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}x^\beta}\frac{1}{1-e^{-\lambda}} = \langle\widetilde{vac}|\,\frac{1}{1-e^{-\lambda}}e^{\frac{e^{-\lambda}ab}{1-e^{-\lambda}}}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Hierbei bezeichnet $(a^k)^{(j)} := \frac{k!}{(k-j)!}a^{k-j}$ die j-te formale Ableitung von a^k.
Aussage 6. ist noch zu zeigen.
Zu 6.: Per Induktion nach l (und k) ist

$$a^k(b+a^+)^l = \sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}(b+a^+)^{l-j}(a^k)^{(j)}. \tag{B.7}$$

$l=1$: Aus

$$a(b+a^+) = 1+(b+a^+)a \tag{B.8}$$

folgt induktiv

$$a^k(b+a^+) = a^{k-1}(b+a^+)a + a^{k-1} = \ldots = (b+a^+)a^k + ka^{k-1}. \tag{B.9}$$

$l \to l+1$:

$$\begin{aligned} a^k(b+a^+)^{l+1} &= a^k(b+a^+)^l(b+a^+) \\ &\overset{\text{IV}}{=} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} (b+a^+)^{l-j} \frac{k!}{(k-j)!} a^{k-j}(b+a^+) \\ &\overset{(\text{B.9})}{=} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \left((b+a^+)^{l+1-j} \frac{k!}{(k-j)!} a^{k-j} + (b+a^+)^{l-j} \frac{k!}{(k-j-1)!} a^{k-j-1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} (b+a^+)^{l-j} (a^k)^{(j)} \end{aligned} \tag{B.10}$$

$\square$

Beweis von Proposition 6.2.
Per Definitionem sind die Ströme $U_j(\beta)$ durch

$$\begin{aligned} U_j(\beta) =: \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} b_j(t)e^{i\beta t}dt\right) = \\ \exp\left(-\int_0^{\infty} b_j(-t)e^{-i\beta t}dt\right)\exp\left(-\int_0^{\infty} b_j(t)e^{i\beta t}dt\right) \end{aligned} \tag{B.11}$$

gegeben.
Damit berechnet sich unter Anwendung von Lemma 6.1 und der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (BCH) der Zweipunktkorrelator (6.4) zu

$$\begin{aligned} &\langle U_j(\beta_1)U_k(\beta_2)\rangle_\lambda = \\ &\langle \exp\left(-\int_0^{\infty} b_j(-t)e^{-i\beta_1 t}dt\right)\exp\left(-\int_0^{\infty} b_j(t)e^{i\beta_1 t}dt\right) \\ &\exp\left(-\int_0^{\infty} b_k(-t)e^{-i\beta_2 t}dt\right)\exp\left(-\int_0^{\infty} b_k(t)e^{i\beta_2 t}dt\right)\rangle_\lambda \\ &\overset{\text{Lemma 6.1}}{=} \\ &\langle\tilde{0}|\exp\left(-\int_0^{\infty}\left(\frac{a_j(t)}{e^{\lambda t}-1}+b_j(-t)\right)e^{-i\beta_1 t}dt\right) \\ &\exp\left(-\int_0^{\infty}\left(a_j(-t)+\frac{b_j(t)}{1-e^{-\lambda t}}\right)e^{i\beta_1 t}dt\right) \\ &\exp\left(-\int_0^{\infty}\left(\frac{a_k(t)}{e^{\lambda t}-1}+b_k(-t)\right)e^{-i\beta_2 t}dt\right) \\ &\exp\left(-\int_0^{\infty}\left(a_k(-t)+\frac{b_k(t)}{1-e^{-\lambda t}}\right)e^{i\beta_2 t}dt\right)|\tilde{0}\rangle \\ &\overset{\text{BCH}}{=} \\ &\exp\left(\int_0^{\infty}\frac{A_{jk}(t)}{1-e^{-\lambda t}}e^{i(\beta_1-\beta_2)t}dt\right) \\ &\exp\left(\int_0^{\infty}\frac{A_{jj}(t)}{e^{\lambda t}-1}dt\right) \\ &\exp\left(\int_0^{\infty}\frac{A_{kk}(t)}{e^{\lambda t}-1}dt\right) \\ &\exp\left(\int_0^{\infty}\frac{A_{jk}(t)}{e^{\lambda t}-1}e^{-i(\beta_1-\beta_2)t}dt\right) \\ &= \\ &\exp\left(\int_0^{\infty}\frac{A_{jk}(t)ch(\lambda t/2+i(\beta_1-\beta_2)t)}{sh(\lambda t/2)}dt\right) \\ &\exp\left(\int_0^{\infty}\frac{A_{jj}(t)+A_{kk}(t)}{e^{\lambda t}-1}dt\right). \end{aligned} \tag{B.12}$$

Per Induktion nach N ergibt sich Gleichung (6.5) für den N-Punktkorrelator. □

Beweis von Gleichung (6.9).

1. Nach Proposition 6.4 ist der Korrelator $\langle U_j U_{j-1}\rangle_\lambda$ durch $\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt A(t)\frac{e^{-i(\beta_1-\beta_2)t}}{e^{\lambda t}-1}\right)$ gegeben, wobei $A(t) = \frac{\sinh\left(\frac{\pi t(\xi-1)}{n}\right)}{t\sinh\left(\frac{\pi t\xi}{n}\right)}$ ist. Damit folgt Gleichung (6.9) aus der Behauptung

$$\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt A(t)\frac{e^{-i(\beta_1-\beta_2)t}}{e^{\lambda t}-1}\right) = const.\varphi(\beta_1-\beta_2)\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta_1-\beta_2-\frac{i\pi}{n})\right). \quad \text{(B.13)}$$

   Um diese zu zeigen, wird die Funktionalgleichung für S_2 benötigt, welche im Anhang Teil A zu finden ist, und durch

$$\frac{S_2(x+\omega_1|\omega_1,\omega_2)}{S_2(x|\omega_1,\omega_2)} = \frac{1}{S_1(x|\omega_2)} \quad \text{(B.14)}$$

   gegeben ist, wobei $S_1(x|\omega) = 2\sin(\pi x/\omega)$.
   Damit ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta_1-\beta_2-\frac{i\pi}{n})\right) &= -i\sin\left(\frac{\pi(i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n})}{\frac{2\pi\xi}{n}}\right)\\ &= \frac{-i}{2}\frac{S_2(i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}|\lambda,\frac{2\pi\xi}{n})}{S_2(i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}+\lambda|\lambda,\frac{2\pi\xi}{n})}.\end{aligned} \quad \text{(B.15)}$$

   Wegen

$$\varphi(\beta_1-\beta_2) = \frac{1}{S_2(i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}|\lambda,\frac{2\pi}{n}\xi)S_2(-i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}|\lambda,\frac{2\pi}{n}\xi)} \quad \text{(B.16)}$$

   ergibt sich

$$\begin{aligned}&\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\beta_1-\beta_2-\frac{i\pi}{n})\right)\cdot\varphi(\beta_1-\beta_2)\\ &= \frac{-i}{2}\frac{1}{S_2(i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}+\lambda|\lambda,\frac{2\pi}{n}\xi)S_2(-i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}|\lambda,\frac{2\pi}{n}\xi)}.\end{aligned} \quad \text{(B.17)}$$

   Schließlich lässt sich die Integralgleichung

$$\log(S_2(x|\omega_1,\omega_2)) = \int_0^{\infty} dt\frac{\sinh((x-\frac{\omega_1+\omega_2}{2})t)}{2t\sinh(\frac{\omega_1 t}{2})\sinh(\frac{\omega_2 t}{2})} \quad \forall\, 0 < \Re(x) < \omega_1+\omega_2 \quad \text{(B.18)}$$

anwenden (siehe Anhang A), um den Beweis von Gleichung (6.9) abzuschließen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{S_2(i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}+\lambda|\lambda,\frac{2\pi}{n}\xi)S_2(-i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}|\lambda,\frac{2\pi}{n}\xi)}\\
&=\exp\left(-\int_0^\infty dt\frac{\sinh((i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}+\frac{\lambda-\frac{2\pi}{n}\xi}{2})t)+\sinh((-i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\pi}{n}-\frac{\lambda+\frac{2\pi}{n}\xi}{2})t)}{2t\sinh(\frac{\lambda t}{2})\sinh(\frac{\pi}{n}\xi t)}\right)\\
&=\exp\left(\int_0^\infty dt\frac{\sinh(\frac{\pi}{n}(\xi-1)t)\cosh((i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\lambda}{2})t)}{t\sinh(\frac{\lambda t}{2})\sinh(\frac{\pi}{n}\xi t)}\right)\\
&=\exp\left(\int_0^\infty dtA(t)\frac{\cosh((i(\beta_1-\beta_2)+\frac{\lambda}{2})t)}{\sinh(\frac{\lambda t}{2})}\right)=\exp\left(\int_{-\infty}^\infty dtA(t)\frac{e^{-i(\beta_1-\beta_2)t}}{e^{\lambda t}-1}\right),
\end{aligned} \tag{B.19}$$

wobei im letzten Schritt $A(-t)=-A(t)$ verwendet wurde.

□

2. Wie bereits angesprochen ist diese Zweipunktfunktion im Fall $n=2$ bereits im Paper [3] von Jimbo et al. durch Gleichung (4.15) gegeben. Die Parameter der Paper sind dabei durch $\xi_{Kojima}=\xi_{Jimbo}+1$ miteinander verbunden. Dies lässt sich anhand des Endergebnisses leicht überprüfen.[26]
   Entsprechend Gleichung (4.15) in Jimbos Paper muss das Produkt

$$\omega'(\alpha-\beta)\exp\left(\int_0^\infty dt\frac{\sinh(\frac{\pi t\xi}{2})}{t\sinh(\frac{\pi t(\xi+1)}{2})}\frac{e^{i(\beta-\alpha)t}+e^{-i(\beta-\alpha)t}}{e^{\lambda t}-1}\right) \tag{B.20}$$

   berechnet werden.
   Laut Definition ist die Funktion $\omega'(\alpha-\beta)$ bis auf einen konstanten Vorfaktor („∼“) durch

$$\begin{aligned}
\omega'(\alpha-\beta)&\sim\frac{\Gamma(\frac{1}{\pi(\xi+1)}(i(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{2}))}{\Gamma(\frac{1}{\pi(\xi+1)}(i(\alpha-\beta)+\pi(\xi+1)-\frac{\pi}{2}))}\\
&=\frac{\Gamma_1(i(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{2}|\pi(\xi+1))}{\Gamma_1(i(\alpha-\beta)+\pi(\xi+1)-\frac{\pi}{2}|\pi(\xi+1))}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

   definiert.[27] Für die zweite Gleichung wurde dabei die Definition $\Gamma_1(x|\omega)=e^{(\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2})\log(\omega)}\frac{\Gamma(x/\omega)}{\sqrt{2\pi}}$ verwendet.
   Nun kann die Integraldarstellung von Γ_1 gegeben durch

$$\log(\Gamma_1(x|\omega))=-\gamma\left(\frac{x}{\omega}-\frac{1}{2}\right)+\int_0^\infty\frac{dt}{t}\frac{e^{-xt}}{1-e^{-\omega t}} \tag{B.22}$$

   verwendet werden, wobei γ die Euler-Mascheroni Konstante ist.

[26] Trotzdem werden in dieser Rechnung, um Missverständnisse zu vermeiden, ausschließlich Jimbos Parameter verwendet.
[27] Dieser wird in Jimbos Paper angegeben, ist für die Rechnung allerdings irrelevant.

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\omega'(\alpha-\beta) \\
&= \exp\left(\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{e^{-(i(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{2})t}-e^{-(i(\alpha-\beta)+\pi(\xi+1)-\frac{\pi}{2})t}}{1-e^{-\pi(\xi+1)t}}\right) \\
&= \exp\left(\int_0^\infty \frac{dt}{t}\frac{e^{-(i(\alpha-\beta)+\frac{\pi}{2})t}(1-e^{-\pi\xi t})}{1-e^{-\pi(\xi+1)t}}\right) \\
&= \exp\left(\int_0^\infty dt\frac{\sinh(\frac{\pi}{2}\xi t)}{t\sinh(\frac{\pi t(\xi+1)}{2})}e^{-i(\alpha-\beta)}\right),
\end{aligned} \tag{B.23}$$

woraus die Behauptung

$$\begin{aligned}
&\omega'(\alpha-\beta)\exp\left(\int_0^\infty dt\frac{\sinh(\frac{\pi t\xi}{2})}{t\sinh(\frac{\pi t(\xi+1)}{2})}\frac{e^{i(\beta-\alpha)t}+e^{-i(\beta-\alpha)t}}{e^{\lambda t}-1}\right)= \\
&\exp\left(\int_0^\infty dt\frac{\sinh(\frac{\pi t\xi}{2})}{t\sinh(\frac{\pi t(\xi+1)}{2})}\frac{e^{i(\beta-\alpha)t}e^{\lambda t}+e^{-i(\beta-\alpha)t}}{e^{\lambda t}-1}\right)= \\
&\exp\left(\int_0^\infty dt\frac{\sinh(\frac{\pi t\xi}{2})}{t\sinh(\frac{\pi t(\xi+1)}{2})}(\frac{e^{-i(\beta-\alpha)t}}{e^{\lambda t}-1}-\frac{e^{i(\beta-\alpha)t}}{e^{-\lambda t}-1})\right)= \\
&\exp\left(\int_0^\infty dtA(t)(\frac{e^{-i(\beta-\alpha)t}}{e^{\lambda t}-1}-\frac{e^{i(\beta-\alpha)t}}{e^{-\lambda t}-1})\right)=\exp\left(\int_{-\infty}^\infty dtA(t)\frac{e^{-i(\beta-\alpha)t}}{e^{\lambda t}-1}\right).
\end{aligned} \tag{B.24}$$

folgt.

$\square$

C. Allgemeine Formel für die Spurfunktion $G_\lambda^{(N)}$

Die allgemeine Formel für die Spurfunktion $G_\lambda^{(N)}(\beta_1,\dots,\beta_N|\beta_{N+1},\dots,\beta_{2N})$ ist

$$
\begin{aligned}
&G_\lambda^{(N)}(\beta_1,\dots,\beta_N|\beta_{N+1},\dots,\beta_{2N})_{\epsilon_1\dots\epsilon_N}{}^{\epsilon_{N+1}\dots\epsilon_{2N}} = const.\, e^{-\frac{n}{2\xi}\sum_{k=1}^{2N}\beta_k}\\
&\cdot\prod_{1\le k<l\le N}\left(E_\lambda(\beta_{N+k}-\beta_{N+l})E_\lambda(\beta_k-\beta_l)\right)\prod_{k,l=1}^{N}\left(E_\lambda^*(\beta_k-\beta_{N+l})\right)\\
&\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_{\epsilon_k+1}^{(k)}}{2\pi i}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_{n-1}^{(k)}}{2\pi i}\frac{e^{\frac{n}{2\xi}\alpha_{\epsilon_k+1}^{(k)}}}{\prod_{l=\epsilon_k+1}^{n-1}\sinh(\frac{n}{2\xi}(\alpha_{l+1}^{(k)}-\alpha_l^{(k)}-\frac{\pi i}{n}))}\right)\\
&\cdot\prod_{k=N+1}^{2N}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_1^{(k)}}{2\pi i}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha_{\epsilon_k}^{(k)}}{2\pi i}\frac{e^{\frac{n}{2\xi}\alpha_{\epsilon_k}^{(k)}}}{\prod_{l=1}^{\epsilon_k}\sinh(\frac{n}{2\xi}(\alpha_l^{(k)}-\alpha_{l-1}^{(k)}-\frac{\pi i}{n}))}\right)\\
&\cdot\prod_{k=1}^{N}\left[\prod_{l=1}^{\epsilon_{N+k}}\left(\varphi(\alpha_l^{(N+k)}-\alpha_{l-1}^{(N+k)})\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_l^{(N+k)}-\alpha_{l-1}^{(N+k)}-\frac{\pi i}{n})\right)\right)\right.\\
&\left.\cdot\prod_{l=\epsilon_k+1}^{n-1}\left(\varphi(\alpha_{l+1}^{(k)}-\alpha_l^{(k)})\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_{l+1}^{(k)}-\alpha_l^{(k)}-\frac{\pi i}{n})\right)\right)\right]\\
&\cdot\prod_{1\le k<l\le N}\left[\prod_{1\le m\le\min(\epsilon_{N+k},\epsilon_{N+l})}\left(\psi(\alpha_m^{(N+k)}-\alpha_m^{(N+l)})\frac{\sinh(\frac{\pi}{\lambda}(\alpha_m^{(N+k)}-\alpha_m^{(N+l)}))}{\sinh(\frac{n}{2\xi}(\alpha_m^{(N+k)}-\alpha_m^{(N+l)}-\frac{2\pi i}{n}))}\right)\right.\\
&\cdot\prod_{1\le m\le\min(\epsilon_k,\epsilon_l)}\left(\psi(\alpha_m^{(k)}-\alpha_m^{(l)})\frac{\sinh(\frac{\pi}{\lambda}(\alpha_m^{(k)}-\alpha_m^{(l)}))}{\sinh(\frac{n}{2\xi}(\alpha_m^{(k)}-\alpha_m^{(l)}-\frac{2\pi i}{n}))}\right)\\
&\cdot\prod_{1\le m\le\min(\epsilon_{N+k},\epsilon_{N+l}-1)}\left(\varphi(\alpha_m^{(N+k)}-\alpha_{m+1}^{(N+l)})\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_m^{(N+k)}-\alpha_{m+1}^{(N+l)}-\frac{\pi i}{n})\right)\right)\\
&\cdot\prod_{1\le m\le\min(\epsilon_k,\epsilon_l-1)}\left(\varphi(\alpha_m^{(k)}-\alpha_{m+1}^{(l)})\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_m^{(k)}-\alpha_{m+1}^{(l)}-\frac{\pi i}{n})\right)\right)\\
&\cdot\prod_{1\le m\le\min(\epsilon_{N+k},\epsilon_{N+l}+1)}\left(\varphi(\alpha_m^{(N+k)}-\alpha_{m-1}^{(N+l)})\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_m^{(N+k)}-\alpha_{m-1}^{(N+l)}-\frac{\pi i}{n})\right)\right)\\
&\left.\cdot\prod_{1\le m\le\min(\epsilon_k,\epsilon_l+1)}\left(\varphi(\alpha_m^{(k)}-\alpha_{m-1}^{(l)})\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_m^{(k)}-\alpha_{m-1}^{(l)}-\frac{\pi i}{n})\right)\right)\right]\\
&\cdot\prod_{k,l=1}^{N}\left[\prod_{\epsilon_k<m\le\epsilon_{N+l}}\left(\psi(\alpha_m^{(k)}-\alpha_m^{(N+l)})\frac{\sinh(\frac{\pi}{\lambda}(\alpha_m^{(k)}-\alpha_m^{(N+l)}))}{\sinh(\frac{n}{2\xi}(\alpha_m^{(k)}-\alpha_m^{(N+l)}-\frac{2\pi i}{n}))}\right)\right.\\
&\cdot\prod_{\epsilon_k<m\le\epsilon_{N+l}-1}\left(\varphi(\alpha_m^{(k)}-\alpha_{m+1}^{(N+l)})\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_m^{(k)}-\alpha_{m+1}^{(N+l)}-\frac{\pi i}{n})\right)\right)\\
&\left.\cdot\prod_{\epsilon_k<m\le\epsilon_{N+l}+1}\left(\varphi(\alpha_m^{(k)}-\alpha_{m-1}^{(N+l)})\sinh\left(\frac{n}{2\xi}(\alpha_m^{(k)}-\alpha_{m-1}^{(N+l)}-\frac{\pi i}{n})\right)\right)\right]. \qquad \text{(C.1)}
\end{aligned}
$$

Dies lässt sich zum Beispiel per Induktion über $N\in\mathbb{N}$ zeigen, ergibt sich aber auch aus kombinatorischen Überlegungen und der Anwendung von Proposition 6.2.

D. Danksagung

Besonderer Dank für die Unterstützung bei der Themenfindung und die Diskussion zahlreicher Fragen gilt meinem Erstgutachter Prof. Dr. Hermann Boos und meinem Zweitgutachter Dr. Frank Göhmann.

Ich möchte Herrn Dr. Lashkevich danken für hilfreiche und interessante Tipps, sowie die Idee, einen Grenzfall des $A_{n-1}^{(1)}$-Face-Modells zu betrachten.

Meinem Komilitonen Arthur Hutsalyuk danke ich für die Hilfe bei zahlreichen Fragen und Rechnungen.

Bei meinen Kommilitonen Frederik, Jens und Philipp bedanke ich mich für ihre Hilfe beim Korrekturlesen.

Ich danke meiner Familie für ihre Unterstützung und insbesondere für die Übernahme einiger Aufgaben in den letzten Wochen.

Zuletzt danke ich allen anderen, die an dieser Arbeit beteiligt sind.

Erklärung

gem. §14 Abs. 6 Prüfungsordnung vom 15.04.2013

Hiermit erkläre ich, Henrik Jürgens, dass ich die von mir eingereichte Abschlussarbeit (Master-Thesis) mit dem Thema

„Entwicklung algebraischer Methoden für die Berechnung der Korrelationsfunktionen integrabler Spinketten“

selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Stellen der Abschlussarbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, in jedem Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Wuppertal, 08.08.2019

Ort, Datum　　　　　　　　　　　　　　　　Unterschrift

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Henrik Jürgens, mich damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit (Master-Thesis) wissenschaftlich interessierten Personen oder Institutionen und im Rahmen von externen Qualitätssicherungsmaßnahmen des Studienganges zur Einsichtnahme zur Verfügung gestellt werden kann.
Korrektur- oder Bewertungshinweise in meiner Arbeit dürfen nicht zitiert werden.

Wuppertal, 08.08.2019

Ort, Datum　　　　　　　　　　　　　　　　Unterschrift