

Das Sine-Gordon Modell und die Inverse Streutransformation

Bachelorarbeit

Zur Erlangung des Grades
Bachelor of Science - Physik

vorgelegt von
Henrik JÜRGENS

13. September 2016



**BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL**

Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften

Erstgutachter: Prof. Dr. Hermann Boos
Zweitgutachter: PD. Dr. Frank Göhmann

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Inverse Streutransformation	2
2. Die Sine-Gordon Gleichung	3
2.1. Nullkrümmungsbedingung	6
3. Direkte Streuung	8
3.1. Die Jost-Lösungen	10
4. Zeitentwicklung	19
5. Inverse Streuung	20
6. Solitonen	24
6.1. Solitonen und Breather	24
6.2. Multisolitonen	25
6.3. Streuung und Asymptotik	26
7. Zusammenfassung	28
Literatur	31
A. Anhang	33
B. Danksagung	35

1. Einleitung

Die sogenannte „Sine-Gordon“ Gleichung $\partial_\nu \partial^\nu \varphi + \sin \varphi = 0$ ¹ ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung in einer Raum und Zeitdimension. In Verbindung gebracht wird diese Gleichung mit der Beschreibung von Flächen konstanter negativer Krümmung (die Pseudosphäre mit Krümmung -1 bzw. $-1/R^2$) [4], von eindimensionalen Kristallgitterstörungen [5], der Ausbreitung des magnetischen Flusses in Josephson Kontakten [3], der Wellenausbreitung in magnetischen Materialien [14], der Anregung von Phononenmoden [12] und der Ausbreitung von Deformationen entlang der DNA Doppelhelix [6].

Man kann diese Gleichung als eine nichtlineare zweidimensionale Erweiterung der in der Teilchenphysik bekannten Klein-Gordon Gleichung verstehen, bei der der lineare Teil durch Terme höherer Ordnung ergänzt wurde. Die Bezeichnung „Sine-Gordon“ hat sich in der Fachliteratur durchgesetzt, und wird deshalb hier verwendet. Das Sine-Gordon Modell ist eine der einfachsten nichtlinearen relativistischen Feldtheorien.

Da die Sine-Gordon-Gleichung solitonenartige² Lösungen zulässt, wurde sie im 20. Jahrhundert intensiv untersucht. Insbesondere gab es viele Ergebnisse in der quantenfeldtheoretischen Betrachtung von Gleichungen mit Solitonenlösungen, da man diese quantisieren kann [15].

Neben der Möglichkeit schnell abfallende Anfangswertprobleme mithilfe der Inversen Streutransformation zu lösen, bildet die Sine-Gordon Gleichung ein unendlichdimensionales Hamiltonsches System und kann geometrisch als Nullkrümmungsbedingung (engl. Zero Curvature Representation) eines auf einem Vektorbündel definierten Zusammenhangs dargestellt werden. Daneben besteht die Möglichkeit der Konstruktion von Wirkungswinkelvariablen, sowie unendlich vielen Erhaltungsgrößen, deren Poissonklammern verschwinden. Die Gleichung ist deshalb im Sinne der Hamiltonschen Mechanik³ integrabel. (vgl. [13] S.510-515)

Parallel zur Sine-Gordon-Gleichung gibt es eine ganze Klasse von Gleichungen mit diesen Eigenschaften, deren Analyse ein großes Spektrum der Mathematik benötigt. So finden beispielsweise Methoden aus der Funktionalanalysis, der Funktionentheorie (bzw. komplexen Analysis), der Differentialgeometrie, der Gruppentheorie und der Theorie der Lie-Algebren ihre Anwendungen. (vgl. [10] S.424-425)

Formal wurde das Anfangswertproblem, welches mit der Sine-Gordon Gleichung verbunden ist, erstmals von Ablowitz, Kaup, Newell und Segur für schnell abfallende Felder durch die Inverse Streutransformation [11] gelöst.

¹Unter Verwendung der 2D Minkowskimetrik $\text{diag}(1, -1)$ und der Einsteinschen Summenkonvention

²Solitone \equiv einsame Welle

³In Analogie zum Liouville-Theorem für endlichdimensionale Systeme

1.1. Inverse Streutransformation

Ziel dieser Arbeit ist das Verständnis der sogenannten Inversen Streutransformation für das Sine-Gordon Modell, einem nichtlinearen Analogon der Fouriertransformation, welches dazu verwendet werden kann, nichtlineare partielle Differentialgleichungen mit gegebenen Anfangswerten zu lösen.

Das Prinzip der Inversen Streutransformation kann genau wie die Fouriertransformation durch ein kommutatives Diagramm dargestellt werden,

$$\begin{array}{ccc}
 (\pi_0(x, 0), \varphi(x, 0)) & \xrightarrow{\mathcal{F}: \text{Direkte Streuung}} & S(\lambda, 0) \\
 \downarrow \tau: \text{Inverse Streutransformation} & & \downarrow \omega(k): \text{Dispersionsrelation} \\
 (\pi_0(x, t), \varphi(x, t)) & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}: \text{Inverse Streuung}} & S(\lambda, t)
 \end{array}$$

wobei \mathcal{F} als Abbildung $(\pi_0, \varphi) \mapsto S(\lambda)$ den nichtlinearen, von einem Spektralparameter λ abhängigen, Variablenwechsel angibt und

$$S(\lambda) = (a(\lambda), b(\lambda); \lambda_n, c_n, n = 1, \dots, N) \quad (1.1)$$

den Streudaten im Falle des Sine-Gordon Modells entspricht, deren Zeitentwicklung durch lineare Gleichungen (meistens gewöhnliche Differentialgleichungen) bestimmt ist. Insgesamt beschreibt dieses Schema eine nichtlineare Variablentransformation von den physikalischen Feldern (π_0, φ) zu den Streudaten $S(\lambda)$, welche das System linearisiert (vgl. [9] S.82).

Aus der Perspektive der hamiltonschen Systeme kann die Inverse Streutransformation als ein Variablenwechsel von physikalischen Feldern zu einem unendlichen Set von Wirkungswinkelvariablen angesehen werden, welche aus den Streudaten konstruiert werden können (vgl. [10] S.90). Die Vielzahl an mathematischen und physikalischen Möglichkeiten (z.B. zur Konstruktion von Lösungen oder lokalen Bewegungsintegralen) ist typisch für diese Art von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, sodass in dieser Arbeit nur ein kleiner Teil aufgegriffen und erklärt werden kann.

Als Hauptquellen dieser Arbeit können die drei Bücher [9], [13] und [10] genannt werden, wobei die Inverse Streutransformation für das Sine-Gordon Modell insbesondere auf den Seiten 393-456 im Buch [9] und auf den Seiten 486-515 Kap. 13 im Buch [13] dargestellt ist.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die Inverse Streutransformation für das Sine-Gordon Modell klar und verständlich wiederzugeben und zu erklären.⁴

⁴Die erarbeiteten Seiten sind am Abschnitts-/Kapitelende nach dem letzten Satzzeichen durch (vgl. [?] S.??-??) angegeben.

2. Die Sine-Gordon Gleichung

Genau wie die Klein-Gordon Gleichung ist die Sine-Gordon Gleichung lorentzinvariant. Aus physikalischer Sicht ist es hilfreich die positive Masse m_0 und die Kopplungskonstante β_0 in die bereits in der Einleitung vorgestellte Gleichung einzuführen. Die Sine-Gordon Gleichung erhält man infolgedessen in der Form:⁵

$$\partial_\nu \partial^\nu \varphi + \frac{m_0^2}{\beta_0} \sin \beta_0 \varphi = 0. \quad (2.1)$$

Man sieht leicht ein, dass die Sine-Gordon Gleichung variationell selbstadjungiert ist, d.h. die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\nu \varphi \partial^\nu \varphi + \frac{m_0^2}{\beta_0} (\cos \beta_0 \varphi - 1) \quad (2.2)$$

besitzt. Äquivalent dazu induziert die Sine-Gordon Gleichung ein Hamiltonsches System mit dem reellen Skalarfeld $\varphi(x, t)$ und dem zugehörigen kanonisch konjugierten Impuls $\pi_0(x, t) = \partial_t \varphi(x, t)$ ⁶. Per Legendre-Transformation erhält man die Hamilton-Dichte:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi_0^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 + \frac{m_0^2}{\beta_0^2} (1 - \cos \beta_0 \varphi). \quad (2.3)$$

Die Funktionen $\varphi(x, t)$ und $\varphi(x, t) + \frac{2\pi}{\beta_0}$ werden aufgrund der Symmetrie der Gleichungen als äquivalent betrachtet. Die Anfangsdaten (Zeitpunkt $t = 0$) der kanonisch konjugierten Variablen $\pi_0(x, t)$ und $\varphi(x, t)$ werden für Sine-Gordon Gleichung folgenderweise notiert:

$$\varphi(x) = \varphi(x, t)|_{t=0}, \quad \pi_0(x) = \pi_0(x, t)|_{t=0}. \quad (2.4)$$

Typische Randbedingungen sind durch a) bzw. b) gegeben:

a) Periodische Randbedingungen

$$\varphi(x + 2L) \equiv \varphi(x) \left(\text{mod} \frac{2\pi}{\beta_0} \right), \quad \pi_0(x + 2L) = \pi_0(x), \quad (2.5)$$

b) Schnell abfallende Randbedingungen

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0 \left(\text{mod} \frac{2\pi}{\beta_0} \right), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \pi_0(x) = 0, \quad (2.6)$$

wobei die Randwerte genügend schnell erreicht werden müssen, zum Beispiel im Sinne von Schwartz, d.h. $\varphi(x), \pi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Aus den Randbedingungen folgt die Konstanz der

⁵Wie in der Einleitung wird im Folgenden die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

⁶Die Operatoren ∂_x und ∂_t (Ableitungsoperatoren) wirken immer auf die erste nachfolgende Funktion.

topologischen Ladung

$$\mathcal{Q} = \frac{\beta_0}{2\pi} \int \partial_x \varphi \, dx \quad \in \mathbb{Z}, \quad (2.7)$$

wobei über den fundamentalen Definitionsbereich $[-L, L]$ bzw. über die reelle Achse $(-\infty, \infty)$ integriert wird. Der Phasenraum des Systems besteht aus den Anfangsdaten $(\pi_0(x), \varphi(x))$, welche die Bedingungen a) bzw. b) erfüllen.

Die Poissonstruktur des Hamiltonschen Systems ist definiert durch die Poisson Klammern

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \{\pi_0(x), \pi_0(y)\} = 0, \quad \{\pi_0(x), \varphi(y)\} = \delta(x - y), \quad (2.8)$$

wobei der zweite Ausdruck als Distribution⁷ $\int f \cdot d\delta(x - y)$ wohldefiniert ist. Mit dem Begriff „Dualraum“ ist der topologische Dualraum gemeint, der mit einem ' notiert wird.

Die Poissonstruktur ist auf dem Raum der zulässigen Observablen \equiv „geeignete nichtlineare Funktionale $F(\varphi, \pi_0)$, deren Variationsableitung bezüglich φ und π_0 existiert“ nichtentartet. Für eine genauere Definition der physikalischen Observablen $F(\varphi, \pi_0)$ sei $\varphi \in V_\varphi$ und $\pi_0 \in V_{\pi_0}$, wobei V_φ und V_{π_0} topologische Vektorräume sind.⁸ Man definiert für lineare Funktionale \tilde{F} , für die

$$\tilde{F} \in \sum_{\substack{k,l=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} \left(\bigotimes_{i=0}^k V'_\varphi \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=0}^l V'_{\pi_0} \right) \quad (2.9)$$

ist, formal die nichtlinearen Funktionale

$$F : V_\varphi \times V_{\pi_0} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, \pi_0) \longmapsto c + \tilde{F} \left(\sum_{\substack{k,l=0 \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} \left(\bigotimes_{i=0}^k \varphi \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=0}^l \pi_0 \right) \right) \quad (2.10)$$

und fordert, dass diese für alle $\pi_0 \in V_{\pi_0}$ und $\varphi \in V_\varphi$ absolut konvergent sind (vgl. [9] S.13), sodass die Variationsableitung dieser Funktionale bezüglich einer dieser Variablen zu den Dualräumen V'_φ bzw. V'_{π_0} gehört. Für die Funktionale, deren Variationsableitung nach π_0 bzw. φ zu V''_φ bzw. V''_{π_0} gehört, definiert man die Poissonklammern analog zu den Poissonklammern aus der Mechanik durch (vgl. [9] S.13)

$$\{F, G\} := \int \left(\frac{\delta F}{\delta \pi_0(x)} \frac{\delta G}{\delta \varphi(x)} - \frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} \frac{\delta G}{\delta \pi_0(x)} \right) dx. \quad (2.11)$$

⁷Funktional des top. Dualraums des durch die Randbedingungen a) bzw. b) gegebenen Raumes

⁸In den meisten Fällen, z.B. für die Randbedingungen a) und b), gilt $V_\varphi = V_{\pi_0}$.

In den Fällen a) bzw. b) ist $V'_\varphi = V'_{\pi_0}$.⁹ Die Nichtentartung der Poissonklammer verifiziert man dadurch, dass für eine Observable F , für die

$$\{F, G\} = 0 \quad \forall G \quad (2.12)$$

ist, $F \equiv \text{const}$ folgt. In diesem Fall folgt das Verschwinden der Variationsableitung, sodass $F = \text{const}$ gefolgert werden kann. Der Phasenraum beinhaltet deshalb eine symplektische Struktur und man definiert die zugehörige geschlossene symplektische 2-Form Ω durch (vgl. [9] S.15 und [13] S.474 Gl. 12.78)

$$\Omega_{SG} = \int \delta\pi_0(x) \wedge \delta\varphi(x) dx, \quad (2.13)$$

wobei die Integrationsgrenzen entsprechend den Randbedingungen zu wählen sind. Die Differentiale kontinuierlicher Koordinaten werden mit $\delta\pi_0$ und $\delta\varphi$ bezeichnet.¹⁰ Die Sine-Gordon Gleichung kann in der Hamiltonschen Form

$$\partial_t\varphi = \{H, \varphi\}, \quad \partial_t\pi_0 = \{H, \pi_0\} \quad (2.14)$$

geschrieben werden, mit dem Hamiltonian

$$H = \int \left(\frac{1}{2}\pi_0^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 + \frac{m_0^2}{\beta_0^2}(1 - \cos\beta\varphi) \right) dx \quad (2.15)$$

und den Randbedingungen a) bzw. b) entsprechenden Integrationsgrenzen.

Der Hamiltonian H , der Impuls P

$$P = - \int \pi_0 \partial_x \varphi dx \quad (2.16)$$

und der Erzeuger der speziellen Lorentztransformationen K

$$K = \int x \left(\frac{1}{2}\pi_0^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 + \frac{m_0^2}{\beta_0^2}(1 - \cos\beta_0\varphi) \right) dx \quad (2.17)$$

induzieren eine Hamiltonsche Wirkung der Lie-Algebra der Poincare Gruppe der zweidimensionalen Raumzeit. Ihre Poissonklammern ergeben

$$\{H, P\} = 0, \quad \{H, K\} = P, \quad \{K, P\} = -H. \quad (2.18)$$

(vgl. [9] S.284-286)

⁹Für die Randbedingungen b) beispielsweise ist der Dualraum des Schwartzraumes gegeben durch den Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ und $V'_{\pi_0} = V'_\varphi = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

¹⁰In Übereinstimmung mit der Notation aus der Variationsrechnung

2.1. Nullkrümmungsbedingung

Es stellt sich heraus, dass sich eine ganze Reihe exakt lösbarer nichtlinearer partieller Differentialgleichungen geometrisch aus der Nullkrümmung einer Lie-Algebra-wertigen Zusammenhangsform

$$\omega = B_x(x, t, \lambda)dx + B_t(x, t, \lambda)dt \quad (2.19)$$

ergibt. Die Nullkrümmungsbedingung besagt, dass die durch die Variablen x und t parametrisierte Raumzeit lokal flach ist, sodass über dem \mathbb{R}^2 das triviale Vektorbündel $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ definiert werden kann (vgl. [9] S.21-22).

Im Falle der Sine-Gordon Gleichung hat die Zusammenhangsform Werte in der Loop-Algebra $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}_2) \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ bzw. in der Unteralgebra $\mathfrak{su}(2) \otimes \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}] \subseteq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}]$ [8].

Die Komponenten der so definierten Zusammenhangsform können als lokale Zusammenhangskoeffizienten auf dem trivialen Vektorbündel $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ betrachtet werden und durch die Matrizen

$$B_x(x, t, \lambda) = \frac{\beta_0}{4i} \pi_0 \sigma_3 + \frac{k_0}{i} \sin\left(\frac{\beta_0 \varphi}{2}\right) \sigma_1 + \frac{k_1}{i} \cos\left(\frac{\beta_0 \varphi}{2}\right) \sigma_2, \quad (2.20)$$

$$B_t(x, t, \lambda) = \frac{\beta_0}{4i} \partial_x \varphi \sigma_3 + \frac{k_1}{i} \sin\left(\frac{\beta_0 \varphi}{2}\right) \sigma_1 + \frac{k_0}{i} \cos\left(\frac{\beta_0 \varphi}{2}\right) \sigma_2 \quad (2.21)$$

dargestellt werden, wobei σ_i , $i = 0, 1, 2, 3$ die Pauli-Matrizen sind und

$$k_0 = \frac{m_0}{4} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad k_1 = \frac{m_0}{4} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (2.22)$$

Die kovariante Ableitung X_μ , $\mu = 0, 1$ in Richtung $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ist gegeben durch

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} - B_0, \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} - B_1; \quad x^0 = t, \quad x^1 = x \quad (2.23)$$

und ist lorentzinvariant.¹¹ Um das zu sehen, notiert man $\pi_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0}$ und kombiniert k_0 und k_1 zu einem Lorentzvektor der Länge $\frac{m_0}{2}$: $k^2 = k_\mu k^\mu = k_\mu \cdot k_\mu = k_0^2 - k_1^2 = \frac{m_0^2}{4}$. Analog kombiniert man k_1 und k_0 zu einem Lorentzvektor. (vgl. [9] S.286)

Vektorfelder F , deren kovariante Ableitung 0 ergibt, d.h.

$$X_\mu dx^\mu \circ F^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^\nu - B_\mu{}^\nu{}_\alpha F^\alpha \right) dx^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv 0, \quad (2.24)$$

¹¹Es ist $B_0 = B_t$ und $B_1 = B_x$.

nennt man kovariant konstant. Dabei ist $B_\alpha^\beta{}_\gamma$ die Komponente ${}^\beta{}_\gamma$ von B_α .

Die zu der Zusammenhangsform ω gehörige Krümmungsform Ω ist definiert durch

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \quad (2.25)$$

Die Nullkrümmungsbedingung bedeutet, dass Ω identisch verschwindet, d.h. $\Omega \equiv 0$. Ausgedrückt durch die Matrizen B_x und B_t schreibt sich die Nullkrümmungsbedingung (2.25) als

$$\partial_t B_x - \partial_x B_t - [B_x, B_t] = 0, \quad (2.26)$$

wobei $[\cdot, \cdot]$ den Kommutator bezeichnet, was äquivalent zum Vertauschen der Ableitungen ∂_x und ∂_t für Vektorfelder¹² auf dem \mathbb{R}^2 mit Werten in \mathbb{C}^2 ist. Unter Verwendung der Algebra der Pauli-Matrizen überprüft man, dass diese Bedingung genau dann erfüllt ist, wenn π_0 und φ die Sine-Gordon Gleichung erfüllen. Ein lokaler linearer Bildwechsel in der Faser \mathbb{C}^2 , d.h. die Eichtransformation

$$F(x, t, \lambda) \mapsto J(x, t, \lambda)F(x, t, \lambda) \quad (2.27)$$

für das Vektorfeld F , wird gefolgt von der Transformation

$$\omega \mapsto dJ \cdot J^{-1} + J \cdot \omega \cdot J^{-1}, \quad (2.28)$$

wobei $J = J(x, t, \lambda)$ die Transformationsmatrix ist und \cdot das Produkt der matrixwertigen Komponenten bezeichnet. Durch die Bedingung (2.28) transformiert sich das, durch die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes $V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ in Richtung eines Vektorfeldes $Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ erzeugte, Vektorfeld

$$Z^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = Y^\mu X_\mu V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (2.29)$$

kovariant, d.h. für das Vektorfeld $Z(x, t, \lambda)$ gilt ebenfalls:

$$Z(x, t, \lambda) \mapsto J(x, t, \lambda)Z(x, t, \lambda). \quad (2.30)$$

Man rechnet mit der Ableitungsregel $dJ^{-1} = J^{-1} \cdot dJ \cdot J^{-1}$ leicht nach, dass die Nullkrümmungsbedingung/Krümmungsform ebenfalls bis auf eine Ähnlichkeitstransformation mit der Matrix J erhalten bleibt:

$$\Omega \mapsto J \cdot \Omega \cdot J^{-1}. \quad (2.31)$$

¹²Schnitte im Vektorbündel $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2 \sim \Gamma(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2)$

Daher ist die Zusammenhangsform ω bis auf eine Eichtransformation der Form (2.28) eindeutig bestimmt. Falls die Polstruktur von ω erhalten bleiben soll, fordert man, dass Eichtransformationen J nicht von λ abhängen. Die Krümmungsform ω wird als Eichäquivalent zu jeder transformierten Form $\tilde{\omega} := dJ \cdot J^{-1} + J \cdot \omega \cdot J^{-1}$ bezeichnet.

(vgl. [9] S.20-26)

3. Direkte Streuung

In den folgenden drei Kapiteln soll die Inverse Streutransformation für die Sine-Gordon Gleichung, welche im Buch [13] ab Seite 486 zu finden ist, nachvollzogen werden. Dazu werden zuerst die bereits eingeführten Zusammenhangskoeffizienten B_t und B_x , welche in Kapitel 2.1 aus [9] übernommen wurden, mit den Zusammenhangskoeffizienten A_t und A_x ([13] S.486-487 Gl. 13.4, 13.5) in Verbindung gesetzt. Aus diesem Grund wird die reskalierte Kopplungskonstante $\beta = -\frac{1}{2}\beta_0$ und die reskalierte Masse $m = \frac{1}{4}m_0$ eingeführt, sodass die Sine-Gordon Gleichung ausgedrückt durch m und β in die Form

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \frac{8m^2}{\beta} \sin(2\beta\varphi) = 0 \quad (3.1)$$

übergeht ([13] S.486 Gl. 13.1).

Um die Zusammenhangskoeffizienten A_t und A_x aus B_t (2.20) und B_x (2.21) zu erhalten, definiert man

$$t' = -t, \quad B'_t(x, t', \lambda) = -B_t(x, t(t'), \lambda) \quad (3.2)$$

sodass die Nullkrümmungsbedingung für B'_t und B_x der Nullkrümmungsbedingung für B_t und B_x entspricht. Schließlich wendet man die Eichtransformation $\Omega_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{2}}$ auf die Zusammenhangskoeffizienten B'_t und B_x an und setzt $t' := t^{13}$, sodass sich die transformierten Zusammenhangskoeffizienten

$$\begin{aligned} A_x(x, t, \lambda) &= \Omega_0 B_x(x, t, \lambda) \Omega_0^{-1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{2}} B_x \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{2}} \\ &= i \left[\frac{\beta}{2} \pi_0 \sigma_3 + k_1 \cos(\beta\varphi) \sigma_1 - k_0 \sin(\beta\varphi) \sigma_2 \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} A_t(x, t, \lambda) &= \Omega_0 B'_t(x, t, \lambda) \Omega_0^{-1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{2}} B'_t \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{2}} \\ &= i \left[\frac{\beta}{2} \partial_x \varphi \sigma_3 - k_0 \cos(\beta\varphi) \sigma_1 + k_1 \sin(\beta\varphi) \sigma_2 \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

ergeben. Die Operatoren $i(\partial_x - A_x)$ und $i(\partial_t - A_t)$ sind im Hilbertraum Raum $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ formal selbstadjungiert, was an dieser Stelle nicht bewiesen werden soll.¹⁴ Gesucht wäre ein

¹³Es besteht keine Verwechslungsgefahr, da die Sine-Gordon Gleichung symmetrisch in t ist.

¹⁴Die Symmetrie bzw. Hermitizität der Operatoren kann leicht nachgerechnet werden.

geeigneter dichter Definitionsbereich, sodass diese Operatoren selbstadjungiert werden.¹⁵ Die Sine-Gordon Gleichung kann nun geschrieben werden als Kompatibilitätsbedingung ($\partial_t \partial_x = \partial_x \partial_t$) der Gleichungen ([13] S.486 Gl. 13.2, 13.3)

$$(\partial_x - A_x)\Psi = 0, \quad (3.5)$$

$$(\partial_t - A_t)\Psi = 0. \quad (3.6)$$

Mit der Wahl $\tilde{\omega} = A_x dx + A_t dt$ bedeutet das $\tilde{\Omega} = d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} \equiv 0$.

Es sollen im Folgenden Lösungen der Sine-Gordon Gleichung mit schnell abfallenden Randbedingungen (2.6) betrachtet werden. Ferner soll angenommen werden, dass

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{\mathcal{Q}\pi}{\beta}, \quad \mathcal{Q} \in \mathbb{Z} \quad (3.7)$$

gilt. Die Zahl \mathcal{Q} wird topologische Ladung der Feldkonfiguration genannt. Diese Bedingungen sind mit den Bewegungsgleichungen kompatibel, und entsprechen einem Minimum des Sine-Gordon Potentials (vgl. Kap. 2).

Die Lösung einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung durch die Inverse Streutransformation erfolgt in drei Schritten.

- Mit gegebenen Anfangsdaten $\varphi(x)$ und $\pi_0(x)$ löst man das direkte Streuproblem:

$$[\partial_x - A_x(\lambda, \varphi(x), \pi_0(x))]\Psi = 0. \quad (3.8)$$

Man bestimmt die Streudaten $a(\lambda, 0)$, $b(\lambda, 0)$ für das kontinuierliche Spektrum und das diskrete Spektrum $(\lambda_n, c_n, n = 1, \dots, N)$ aus der Asymptotik von φ und π_0 .

- Um die Zeitentwicklung der Streudaten zu bestimmen, benutzt man die zweite Gleichung:

$$[\partial_t - A_t(\lambda, \varphi(x), \pi_0(x))]\Psi = 0. \quad (3.9)$$

Man verwendet für $x \rightarrow \pm\infty$ die Asymptotik der Felder π_0 und φ ¹⁶, um die Zeitentwicklung der Streudaten zu bestimmen, d.h. $a(\lambda, t)$, $b(\lambda, t)$, $c_n(t)$ und $\lambda_n(t)$.

- Aus den Streudaten zur Zeit t rekonstruiert man die Matrix $A_x(x, t, \lambda)$ durch die Lösung der Gelfand-Levitan-Marchenko Gleichung (siehe [7], [19]), einer linearen Integralgleichung, und bestimmt dadurch das Feld $\varphi(x, t)$ zur Zeit t .

(vgl. [13] S.486-487)

¹⁵Eine geeignete Wahl wäre der Sobolev Raum $H^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, $H^1 \equiv W^{2,1}$.

¹⁶Da A_t nicht von π_0 abhängt, genügt es, die Asymptotik von φ als bekannt vorauszusetzen.

3.1. Die Jost-Lösungen

Das direkte Streuproblem (3.8) ist durch die lineare Gleichung

$$\left(\partial_x - i \left[\frac{\beta}{2} \pi_0 \sigma_3 + k_1 \cos(\beta\varphi) \sigma_1 - k_0 \sin(\beta\varphi) \sigma_2 \right] \right) \Psi = 0 \quad (3.10)$$

definiert und beinhaltet ein paar einfache Symmetrien.

Für reelles λ findet man $A_x^* = \sigma_2 A_x \sigma_2^{17}$, und allgemeiner für komplexes λ hat man $(A_x(x, \lambda))^* = \sigma_2 A_x(x, \lambda^*) \sigma_2$, was man mit den Relationen¹⁸

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 0 \quad \forall i \neq j, \quad i, j \neq 0; \quad \sigma_i \sigma_i = \sigma_0 \quad (3.11)$$

leicht einsieht. Aus diesem Grund definiert man für eine Lösung Ψ von (3.10) die konjugierte Lösung $\bar{\Psi} := \sigma_2 \Psi^*$ zum konjugiert komplexen Spektralparameter λ^* :

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\psi_2^* \\ i\psi_1^* \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Daher ist $\bar{\Psi}(\lambda) = \sigma_2(\Psi(\lambda^*))^*$ eine weitere Lösung zum Spektralparameter λ . Im Folgenden sei die konjugierte Lösung $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(\lambda)$ die Lösung zum gleichen Spektralparameter λ .

Unter Verwendung von (3.11) sieht man, dass $A_x(-\lambda) = \sigma_3 A_x(\lambda) \sigma_3$ ist, sodass $\sigma_3 \Psi(x, -\lambda)$ ebenfalls eine Lösung ist. Für zwei Lösungen $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ und $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ definiert man die Wronskideterminante $W(\xi, \Psi)$ durch:

$$W(\xi, \Psi) = \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \psi_1 \\ \xi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 \psi_2 - \xi_2 \psi_1. \quad (3.13)$$

Da $\text{tr}(A_x) = 0$ ist¹⁹, folgt z.B. aus dem Laplaceschen Entwicklungssatz (vgl. [1]):

$$\begin{aligned} \partial_x W(\xi, \Psi) &= \partial_x \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \psi_1 \\ \xi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} = \text{tr} \left(\text{adj} \begin{pmatrix} \xi_1 & \psi_1 \\ \xi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \xi_1 & \psi_1 \\ \xi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{tr} \left(\text{adj} \begin{pmatrix} \xi_1 & \psi_1 \\ \xi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} A_x \begin{pmatrix} \xi_1 & \psi_1 \\ \xi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \xi_1 & \psi_1 \\ \xi_2 & \psi_2 \end{pmatrix} \text{tr}(A_x) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Wronskideterminante hängt deshalb nicht von x ab.

Unter Verwendung der Asymptotik von φ und π_0 (vgl. (2.6) mit der Annahme (3.7)), erhält man aus (3.10) die Gleichungen

$$[\partial_x - ik_1 \sigma_1] \Psi = 0, \quad x \rightarrow -\infty; \quad [\partial_x - ie^{i\pi Q} k_1 \sigma_1] \Psi = 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (3.15)$$

^{17*} bezeichne die komplexe Konjugation.

¹⁸ $\{\cdot, \cdot\}$ bezeichne für Matrizen den Antikommutator.

¹⁹ $\text{tr} \equiv$ Spur (engl. trace), $\text{adj} \equiv$ Adjunkte.

sodass sich das asymptotische Verhalten $x \rightarrow \pm\infty$ der Lösungen von (3.10) durch

$$\Psi|_{x \rightarrow -\infty} \sim e^{ik_1 x \sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_1 x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1 x} \quad (3.16)$$

$$\Psi|_{x \rightarrow +\infty} \sim e^{ie^{i\pi\mathcal{Q}} k_1 x \sigma_1} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi\mathcal{Q}} \\ 1 & -e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix}^t \mathbf{c}' = c'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{ik_1 x} + c'_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{-ik_1 x} \quad (3.17)$$

ergibt. Die Jost-Lösungen sind Lösungen des linearen Systems mit bestimmtem Verhalten im Unendlichen. Unter Verwendung der Beziehung²⁰ $\Im(k_1) = (1 + |\lambda|^{-2})\Im(\lambda)$ wird nachfolgende Definition vorausgesetzt.

Definition 3.1. Die Jost-Lösungen f_1 und f_2 sind durch das folgende asymptotische Verhalten definiert:

$$f_1 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{ik_1 x}, \quad x \rightarrow +\infty; \quad f_2 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1 x}, \quad x \rightarrow -\infty \quad (3.18)$$

Diese Lösungen sind so gewählt, dass sie asymptotisch beschränkt bleiben, falls λ einen positiven Imaginärteil hat.

Die asymptotische Form der Jost-Lösungen folgt aus der Definition 3.1, den Gleichungen (3.16) und (3.17):

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$
f_1	$c_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_1 x} + c_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1 x}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{ik_1 x}$
f_2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1 x}$	$c_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{ik_1 x} + c_{22} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{-ik_1 x}$

Durch die Auswertung der Wronskideterminanten der Jost-Lösungen und deren konjugierten Jost-Lösungen bei $x = +\infty$ bzw. $x = -\infty$ ergeben sich für die bezüglich x konstanten Koeffizienten $c_{ij} = c_{ij}(\lambda)$ die Beziehungen:²¹

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$
$W(f_1, f_2)$	$-2c_{11}(\lambda)$	$-2c_{22}(\lambda)e^{i\pi\mathcal{Q}}$
$W(f_1, \bar{f}_2)$	$2ic_{12}(\lambda)$	$2ic_{21}^*(\lambda)$
$W(f_1, \bar{f}_1)$	$2i(c_{11} ^2 + c_{12} ^2)$	$2i$

²⁰ $\Im(\cdot)$ bezeichne den Imaginärteil und A^t die Transponierte von A.

²¹Die zweite und dritte Zeile ist dabei nur für reelle λ richtig. Für komplexe λ muss $c_{21}^*(\lambda)$ in Zeile 2 durch $(c_{21}(\lambda^*))^*$ ersetzt werden und $(|c_{11}|^2 + |c_{12}|^2)$ in Zeile 3 durch $[c_{11}(\lambda)(c_{11}(\lambda^*))^* + c_{12}(\lambda)(c_{12}(\lambda^*))^*]$.

Da die Wronskideterminanten konstant sind, folgt hieraus

$$c_{11}(\lambda) = c_{22}(\lambda)e^{i\pi\mathcal{Q}} =: a(\lambda), \quad c_{12}(\lambda) = c_{21}^*(\lambda) =: -b(\lambda). \quad (3.19)$$

Zusätzlich folgt aus der dritten Zeile

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1. \quad (3.20)$$

Das asymptotische Verhalten der Jost-Lösungen kann deshalb wie folgt umgeschrieben werden:

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow +\infty$
f_1	$a(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_1x} - b(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1x}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{ik_1x}$
f_2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1x}$	$-b^*(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{ik_1x} + a(\lambda) \begin{pmatrix} e^{i\pi\mathcal{Q}} \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1x}$

Wegen der Eindeutigkeit der Jost-Lösungen, welche z.B. mit dem Satz von Picard-Lindelöf²² begründet werden kann, und der linearen Unabhängigkeit (d.h. solange $a(\lambda) \neq 0$ ist) folgen aus dem Vergleich des asymptotischen Verhaltens von \bar{f}_i und $\sigma_3 f_i(-\lambda)$ mit der Asymptotik der Jost-Lösungen für reelle λ die Beziehungen:

$$\bar{f}_1 = -i\frac{b^*}{a}f_1 - \frac{i}{a}f_2, \quad \bar{f}_2 = \frac{i}{a}f_1 + i\frac{b}{a}f_2, \quad (3.21)$$

$$\sigma_3 f_1(-\lambda) = e^{-i\pi\mathcal{Q}}\frac{b^*}{a}f_1 + e^{-i\pi\mathcal{Q}}\frac{1}{a}f_2, \quad \sigma_3 f_2(-\lambda) = \frac{1}{a}f_1 + \frac{b}{a}f_2. \quad (3.22)$$

Aus der letzten Gleichung erhält man unter Verwendung von (3.20) und der Betrachtung der Asymptotik $x \rightarrow +\infty$ die Symmetrieeigenschaften

$$a(-\lambda) = e^{-i\pi\mathcal{Q}}a^*(\lambda), \quad b(-\lambda) = -e^{-i\pi\mathcal{Q}}b^*(\lambda). \quad (3.23)$$

Die wichtigste Eigenschaft ist die analytische Fortsetzbarkeit von f_1 , f_2 und $a(\lambda)$ in die obere komplexe Halbebene, welche noch zu beweisen ist. Unter der Annahme, dass diese Aussage bereits gilt, kann eine präzisere Definition der Streudaten gegeben werden. Für λ in der oberen Halbebene, befindet sich $-\lambda^*$, die an der imaginären Achse gespiegelte Zahl, ebenfalls in der oberen Halbebene. Da $A_x(x, -\lambda^*) = \sigma_1(A_x(x, \lambda))^*\sigma_1$, sodass $f(x, -\lambda^*)$ dieselbe Gleichung wie $\sigma_1(f(x, \lambda))^*$ erfüllt, folgt aus dem Vergleich der Asymptotik $x \rightarrow \pm\infty$ für reelles λ wegen (3.23), dass f_1 und f_2 die Symmetriebedingung (3.24) erfüllen:

$$f_1(x, -\lambda^*) = e^{i\pi\mathcal{Q}}\sigma_1(f_1(x, \lambda))^*, \quad f_2(x, -\lambda^*) = -\sigma_1(f_2(x, \lambda))^*. \quad (3.24)$$

²²Bzw. mit einem geeigneten Iterationsverfahren und dem Banachschen Fixpunktsatz (s.u.)

Aus der Eindeutigkeit der Jost-Lösungen f_1 und f_2 folgt die Gültigkeit von (3.24) für beliebige λ in der oberen Halbebene, sodass sich die Beziehung $a(-\lambda) = e^{-i\pi\mathcal{Q}}a^*(\lambda)$ für komplexe λ in der oberen Halbebene zu

$$a(-\lambda^*) = e^{-i\pi\mathcal{Q}}(a(\lambda))^* \quad (3.25)$$

erweitert. Falls $a(\lambda)$ komplexe Nullstellen λ_n , $\Im(\lambda_n) > 0$ hat, folgt aus der Symmetrieeigenschaft (3.25), dass die Nullstellen entweder rein imaginär, oder paarweise symmetrisch zur imaginären Achse auftreten. Da $-W(f_1, f_2) = 2a(\lambda)$ ist, sind die Jost-Lösungen für $\lambda = \lambda_n$ linear abhängig. Aus der Asymptotik folgt für diese λ_n die Normierbarkeit der Jost-Lösungen, welche in diesem Fall den gebundenen Zuständen des Streuproblems (3.10) entsprechen. Für diese λ_n folgt daher

$$f_2(x, \lambda_n) = c_n(\lambda_n)f_1(x, \lambda_n), \quad a(\lambda_n) = 0 \quad \Im(\lambda_n) > 0. \quad (3.26)$$

Mit (3.24) folgt daraus $(c_n(\lambda_n))^* = -e^{i\pi\mathcal{Q}}c_n(-\lambda_n^*)$. Die Funktionen $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ und die komplexen Zahlen λ_n , $c_n := c_n(\lambda_n)$ bestimmen die Streudaten. Die Funktion $a(\lambda)$ wird Jost Funktion genannt.

Proposition 3.2. *Die Jost-Lösungen f_1 und f_2 sind in λ analytische Funktionen in der oberen Halbebene $\Im(\lambda) > 0$.*

Beweis. Man notiere $A_{\pm\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} A_x$, d.h. $A_{-\infty} = ik_1\sigma_1$ und $A_{+\infty} = ie^{i\pi\mathcal{Q}}k_1\sigma_1$. Nachdem man das lineare System (3.10) für $f_{1,2}$ umgeschrieben hat in $(\partial_x - A_{\pm\infty})f_{1,2} = (A_x - A_{\pm\infty})f_{1,2}$, findet man mit der Variation der Konstanten Formel und der Asymptotik der Jost-Lösungen aus Definition 3.1 die Integraldarstellung (3.27):

$$f_{1,2}(x, \lambda) = f_{1,2}^{\pm\infty}(x, \lambda) + \int_{\pm\infty}^x e^{A_{\pm\infty}(x-y)} V_{1,2}(y, \lambda) f_{1,2}(y, \lambda) dy. \quad (3.27)$$

Dabei ist $V_{1,2} = A_x - A_{\pm\infty}$. Die Funktionen $f_{1,2}^{\pm\infty}(x, \lambda)$ sind durch die Asymptotik der Jost-Lösungen bestimmt. Sie erfüllen die „homogene“ Gleichung $(\partial_x - A_{\pm\infty})f_{1,2}^{\pm\infty} = 0$.

$$f_1^{+\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{ik_1x}, \quad f_2^{-\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1x}. \quad (3.28)$$

$e^{A_{\pm\infty}(x-y)}$ ist gegeben durch die Formeln (3.29) und (3.30).

$$e^{A_{+\infty}(x-y)} = \sigma_0 \cos(k_1(x-y)) + ie^{i\pi\mathcal{Q}}\sigma_1 \sin(k_1(x-y)), \quad (3.29)$$

$$e^{A_{-\infty}(x-y)} = \sigma_0 \cos(k_1(x-y)) + i\sigma_1 \sin(k_1(x-y)). \quad (3.30)$$

Um diese Integralgleichungen für $f_{1,2}$ zu analysieren, setzt man $f_{1,2} := e^{\pm ik_1 x} \tilde{f}_{1,2}$ und erhält die Volterra Integralgleichungen:

$$\tilde{f}_{1,2}(x, \lambda) = \tilde{f}_{1,2}^{\pm\infty} + \int_{\pm\infty}^x K_{1,2}(x, y; \lambda) \tilde{f}_{1,2}(y, \lambda) dy. \quad (3.31)$$

Die Kerne $K_{1,2}$ sind gegeben durch

$$K_{1,2}(x, y; \lambda) = e^{\mp ik_1(x-y)} e^{A_{\pm\infty}(x-y)} V_{1,2}(y, \lambda). \quad (3.32)$$

Die Integralgleichungen (3.31) sind für

$$\tilde{f} \in \mathbf{E}_{1,2} := \text{BUC}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2) \cap \{f : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(x) \in \mathbb{R}^2\} \wedge \Im(\lambda) \geq 0 \quad (3.33)$$

wohldefiniert, da $V_{1,2}$ integrierbar ist und $e^{\mp ik_1(x-y)} e^{A_{\pm\infty}(x-y)}$ für $y \in [\pm\infty, x]$ und $\Im(\lambda) \geq 0$ beschränkt ist²³, sodass sich $K_{1,2}(x, y; \lambda)$ in der oberen Halbebene durch eine Matrix $M(y; \lambda)$ abschätzen lässt. Man betrachte den Banachraum $(\mathbf{E}_{1,2}, \|\cdot\|_\infty)$:

Durch Iteration des Integraloperators

$$\mathbf{K}_{1,2}(f) := \tilde{f}_{1,2}^{\pm\infty} + \int_{\pm\infty}^x K_{1,2}(x, y; \lambda) f(y) dy \quad (3.34)$$

zeigt man, dass $\mathbf{K}_{1,2} : \mathbf{E}_{1,2} \rightarrow \mathbf{E}_{1,2}$ eine Kontraktion ist, sodass $\mathbf{K}_{1,2}$ nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Genauer zeigt man, dass $\mathbf{K}_{1,2}^n$ für ein genügend großes $n \in \mathbb{N}$ eine Kontraktion ist:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}_{1,2}^n(f) - \mathbf{K}_{1,2}^n(g)\|_\infty &= \left\| \int_{\pm\infty}^{\cdot} dx_1 K_{1,2}(x, x_1) \cdots \int_{\pm\infty}^{x_{n-1}} dx_n K_{1,2}(x_{n-1}, x_n) [f(x_n) - g(x_n)] \right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{n!} \left| \int_{\pm\infty}^x M(y) dy \right|^n \|f - g\|_\infty = \frac{\alpha^n}{n!} \|f - g\|_\infty. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dies beweist die Existenz und Eindeutigkeit der Jost-Lösungen.

Es folgt, dass $(\mathbf{K}_{1,2})^n(\tilde{f}_{1,2}^{\pm\infty}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_{1,2}$, und da jeder Term für $\Im(\lambda) > 0$ analytisch in λ ist, aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz²⁴ und dem Weierstraßschen Konvergenzsatz, dass auch die Jost-Lösungen analytisch in λ sind. Da $V_{1,2}$ für $\lambda = 0$ einen Pol hat, erwartet man, dass die Jost-Lösungen bei $\lambda = 0$ Singularitäten haben. \square

Anmerkung 3.3. Falls man im Beweis annimmt, dass das Potential φ seine Grenzwerte im Endlichen annimmt, sodass $V_{1,2}$ einen kompakten Träger hat, bleibt das Integrationsintervall endlich und $e^{\mp 2ik_1(x-y)}$ ist auch für $\Im(\lambda) < 0$ nach oben beschränkt. Dann sind $f_1(x, \lambda)$ und $f_2(x, \lambda)$ analytische Funktionen in λ mit Ausnahme von $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$. In diesem Fall können die Streudaten $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ analytisch in die gesamte komplexe Ebene fortgesetzt werden. Die Analoge Aussage folgt unter der Annahme, dass V_1 und V_2 im Unendlichen genügend schnell abfallen, sodass das Wachstum von $e^{\mp 2ik_1(x-y)}$ für $\Im(\lambda) < 0$ kompensiert wird. Insbesondere folgt

²³In (3.29) und (3.30) ist $y \in [\pm\infty, x]$, also ist $|e^{\mp 2ik_1(x-y)}| \leq 1$ für $\Im(\lambda) \geq 0$.

²⁴ $\alpha = \alpha(\lambda)$ ist lokal beschränkt.

aus der Asymptotik von f_1 und f_2 für $x \rightarrow -\infty$, Gleichung (3.26) und den Nullstellen $\lambda = \lambda_n$ von $a(\lambda)$ in der oberen Halbebene, dass $c_n(\lambda_n) = -\frac{1}{b(\lambda_n)}$ ist.

Der nächste Schritt besteht darin, das Verhalten der Jost-Lösungen für $\lambda \rightarrow 0$ und $\lambda \rightarrow \infty$ zu bestimmen.

Proposition 3.4. Für festes x verhalten sich die Jost-Lösungen f_1 und f_2 in der Asymptotik $\lambda \rightarrow 0$ und $\lambda \rightarrow \infty$ wie folgt:

$$\begin{aligned} f_1 &= e^{ik_1x} \left[e^{\frac{i\beta\varphi}{2}\sigma_3} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi Q}{2}} \\ e^{-\frac{i\pi Q}{2}} \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right], & |\lambda| \rightarrow \infty, \\ f_2 &= e^{-ik_1x} \left[e^{\frac{i\beta\varphi}{2}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right], & |\lambda| \rightarrow \infty, \\ f_1 &= e^{ik_1x} \left[e^{-\frac{i\beta\varphi}{2}\sigma_3} \begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi Q}{2}} \\ e^{\frac{i\pi Q}{2}} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda) \right], & |\lambda| \rightarrow 0, \\ f_2 &= e^{-ik_1x} \left[e^{-\frac{i\beta\varphi}{2}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda) \right], & |\lambda| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Beweis. Man sieht leicht, dass die Gleichungen (3.36) für $x \rightarrow \pm\infty$ die in Definition 3.1 geforderte Asymptotik besitzen. Speziell soll die Asymptotik von f_1 für $|\lambda| \rightarrow \infty$ nachgerechnet werden, da alle anderen Fälle auf eine ähnliche Rechnung hinauslaufen. Man führt die Funktion \hat{f}_1 durch die Eichtransformation $f_1 = e^{ik_1x} e^{\frac{i\beta\varphi}{2}\sigma_3} \hat{f}_1$ ein. Diese erfüllt die transformierte Gleichung $[\partial_x + ik_1(1 - \sigma_1) - \hat{A}_x] \hat{f}_1 = 0$, wobei ²⁵

$$\hat{A}_x = i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2}(\dot{\varphi} - \varphi') & m\lambda^{-1}(1 - e^{-2i\beta\varphi}) \\ m\lambda^{-1}(1 - e^{2i\beta\varphi}) & -\frac{\beta}{2}(\dot{\varphi} - \varphi') \end{pmatrix}$$

ist. Durch die Randbedingungen für φ und π_0 ist \hat{A}_x eine Schwartzfunktion, sodass die Variation der Konstanten Formel für \hat{f}_1 äquivalent erfüllt ist:

$$\hat{f}_1(x, \lambda) = \hat{f}_1^0 - \int_x^\infty dy e^{ik_1(y-x)(1-\sigma_1)} \hat{A}_x(y, \lambda) \hat{f}_1(y, \lambda), \quad \hat{f}_1^0 = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi Q}{2}} \\ e^{-\frac{i\pi Q}{2}} \end{pmatrix}.$$

Indem man \hat{f}_1 auf Eigenvektoren von $(1 - \sigma_1)$ zu den Eigenwerten 2 und 0 aufteilt

$$\hat{f}_1 = F(x, \lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + G(x, \lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

²⁵ $\dot{f} = \partial_t f$ und $f' = \partial_x f$

erhält man die gekoppelten skalaren Integralgleichungen:

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &= -i \int_x^\infty dy e^{2ik_1(y-x)} \left\{ \frac{\beta}{2}(\dot{\varphi} - \varphi')G(y, \lambda) - \frac{m}{\lambda} \left(2 \sin^2(\beta\varphi)F(y, \lambda) - i \sin(2\beta\varphi)G(y, \lambda) \right) \right\}, \\ G(x, \lambda) &= e^{-\frac{i\pi\mathcal{Q}}{2}} - i \int_x^\infty dy \left\{ \frac{\beta}{2}(\dot{\varphi} - \varphi')F(y, \lambda) + \frac{m}{\lambda} \left(2 \sin^2(\beta\varphi)G(y, \lambda) - i \sin(2\beta\varphi)F(y, \lambda) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dies sind Volterra Integralgleichungen, deren Iteration wie zuvor gleichmäßig gegen die eindeutige Lösung konvergiert. In diesem Fall konvergiert die Iteration sogar gleichmäßig für λ in einer Umgebung von ∞ in der oberen Halbebene, sodass die Lösung für große λ beschränkt bleibt.²⁶ Anhand der Integraldarstellungen (3.38) sieht man, dass deshalb auch $G'(x, \lambda)$ für große λ beschränkt ist und $F'(x, \lambda) = \mathcal{O}(\lambda)$, $|\lambda| \rightarrow \infty$. Nach einer partiellen Integration des Fourierintegrals für F , wobei der Exponentialterm integriert wird, sieht man $F(x, \lambda) = \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, sodass auch $G(x, \lambda) = e^{-\frac{i\pi\mathcal{Q}}{2}} + \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})$, $|\lambda| \rightarrow \infty$ folgt. \square

Proposition 3.5. *Die Jost Funktion $a(\lambda)$ ist in der oberen Halbebene $\Im(\lambda) > 0$ analytisch. Die Asymptotik $\lambda \rightarrow 0$ und $\lambda \rightarrow \infty$ ist gegeben durch:*

$$a(\lambda) = e^{-\frac{i\pi\mathcal{Q}}{2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty; \quad a(\lambda) = e^{\frac{i\pi\mathcal{Q}}{2}} + \mathcal{O}(\lambda), \quad |\lambda| \rightarrow 0. \quad (3.39)$$

Beweis. Dies folgt aus $a(\lambda) = -\frac{1}{2}W(f_1, f_2)$ und aus der Analytizität der Jost-Lösungen in der oberen Halbebene. \square

Anmerkung 3.6. *Für $x \rightarrow -\infty$ sieht man*

$$\hat{f}_1 \sim a(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - b(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2ik_1x}, \quad (3.40)$$

sodass man die Streudaten $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ direkt aus den Integralgleichungen (3.38) ablesen kann:

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= e^{-\frac{i\pi\mathcal{Q}}{2}} - i \int_{-\infty}^\infty dy \left\{ \frac{\beta}{2}(\dot{\varphi} - \varphi')F(y, \lambda) + \frac{m}{\lambda} \left(2 \sin^2(\beta\varphi)G(y, \lambda) - i \sin(2\beta\varphi)F(y, \lambda) \right) \right\}, \\ b(\lambda) &= -i \int_{-\infty}^\infty dy e^{2ik_1y} \left\{ \frac{\beta}{2}(\dot{\varphi} - \varphi')G(y, \lambda) - \frac{m}{\lambda} \left(2 \sin^2(\beta\varphi)F(y, \lambda) - i \sin(2\beta\varphi)G(y, \lambda) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Auch hier sieht man, dass $a(\lambda)$ bereits eine analytische Fortsetzung in die obere Halbebene besitzt, da F und G in die obere Halbebene fortsetzbar sind. Im Gegensatz dazu stimmt diese Aussage für $b(\lambda)$ im Allgemeinen nicht, da $b(\lambda)$ einer Fouriertransformation über die gesamte reelle Achse entspricht. Falls φ einen kompakten Träger hat, können $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ in die gesamte komplexe Ebene analytisch fortgesetzt werden, was man an der Asymptotik von f_1 für $|\lambda| \rightarrow 0$ abliest.²⁷ Ebenso folgt aus Proposition 3.4, dass $b(\lambda)$ auch in $\lambda = 0$ definiert ist und $F(x, \lambda)$ sowie $G(x, \lambda)$ in x beliebig oft differenzierbar sind, sodass man durch partielle Integration sieht, dass $b(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow 0, \infty$ schneller als jede Potenz von λ verschwinden muss. Mit der Relation $|a|^2 + |b|^2 = 1$ folgt, dass der Betrag von $a(\lambda)$ für reelle λ und $|\lambda| \rightarrow 0, \infty$ gegen 1 konvergiert.

²⁶Dies sieht man, indem man die Abschätzung in Proposition 3.2 mit \hat{A}_x durchführt.

²⁷ $a(\lambda)$ und $b(\lambda)$ sind in einer Umgebung von 0 beschränkt.

Man benötigt weitere Darstellungen der Jost-Lösungen f_1 und f_2 , in denen die Abhängigkeit von λ explizit ist. Es ist günstig, zuerst die explizite Abhängigkeit von φ in den asymptotischen Darstellungen (3.36) ($|\lambda| \rightarrow \infty$) loszuwerden, sodass man definiert:

$$f_1 = e^{\frac{i}{2}(\beta\varphi - \pi\mathcal{Q})\sigma_3} \widehat{f}_1, \quad f_2 = e^{\frac{i}{2}\beta\varphi\sigma_3} \widehat{f}_2. \quad (3.41)$$

Proposition 3.7. *Diese Funktionen lassen die folgenden Fourierdarstellungen zu:*

$$\widehat{f}_1(x, \lambda) = e^{ik_1x} \widehat{f}_1^0 + \int_x^\infty dy \left(\widehat{U}_1(x, y) + \lambda^{-1} \widehat{W}_1(x, y) \right) e^{ik_1y}, \quad (3.42)$$

$$\widehat{f}_2(x, \lambda) = e^{-ik_1x} \widehat{f}_2^0 + \int_{-\infty}^x dy \left(\widehat{U}_2(x, y) + \lambda^{-1} \widehat{W}_2(x, y) \right) e^{-ik_1y}. \quad (3.43)$$

Dabei sind $\widehat{U}_i(x, y)$ und $\widehat{W}_i(x, y)$ zweikomponentige Vektoren, und

$$\widehat{f}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix}, \quad \widehat{f}_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Beweis. Man betrachte eine Funktion $f(\lambda)$, welche in der oberen Halbebene²⁸ $\Im(\lambda) > 0$ analytisch ist. Die Abbildung $k_1 : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{H}^+$, $\lambda \mapsto m(\lambda - \lambda^{-1})$ ist eine biholomorphe Abbildung, welche die obere Halbebene zweimal überstreicht. Die Zahlen λ und $-\lambda^{-1}$ werden auf denselben Funktionswert abgebildet, sodass eine analytische Funktion $g(\lambda)$, welche λ und $-\lambda^{-1}$ auf denselben Funktionswert abbildet, mit einer analytischen Funktion $\tilde{g}(k_1) = g(\lambda(k_1))$ identifiziert werden kann.

Deshalb kann man die Funktion $f(\lambda)$ wie folgt umschreiben:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \left(f(\lambda) + f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \right) + \frac{1}{2} \left(f(\lambda) - f\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \right) = g_1(k_1) + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) g_2(k_1). \quad (3.45)$$

g_1 und g_2 sind dabei analytische Funktionen in der oberen Halbebene. Falls f in $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ beschränkt ist, folgt für $|k_1| \rightarrow \infty$, dass g_1 beschränkt ist und g_2 gegen 0 konvergiert. Alternativ kann man $f(\lambda) = h_1(k_1) + \frac{1}{\lambda} h_2(k_1)$ unter Verwendung von $\lambda + \frac{1}{\lambda} = 2\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{m} k_1$ schreiben, sodass h_1 für $|k_1| \rightarrow \infty$ beschränkt ist und h_2 gegen 0 konvergiert.

Mit Hilfe des Satzes von Paley-Wiener (siehe [17]) kann man die Funktionen h_i in der Form

$$h_i(k_1) = c_i + \int_0^\infty u_i(y) e^{ik_1y} dy \quad (3.46)$$

darstellen, wobei die Funktionen u_i L^1 -Funktionen sind, sodass das Fourierintegral für $|k| \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert und die c_i die Grenzwerte der h_i sind. Die Analytizität der h_i in der oberen Halbebene kann durch den Träger der Fourier-Transformation, bzw. durch den Träger der Funktionen u_i entlang der positiven Halbachse \mathbb{R}^+ begründet werden, sodass die Voraussetzungen für das Ableiten von Parameterintegralen erfüllt

²⁸Die obere komplexe Halbebene wird hier auch mit \mathbb{H}^+ abgekürzt.

sind. Da die transformierte Jost-Funktion \widehat{f}_1 analytisch in der oberen Halbebene ist, und $e^{-ik_1x}\widehat{f}_1$ für $\lambda \rightarrow 0, \infty$ nach Proposition 3.4 beschränkt ist, kann man $e^{-ik_1x}\widehat{f}_1 =: \tilde{h}_1(k_1) + \frac{1}{\lambda}\tilde{h}_2(k_1)$ durch Funktionen \tilde{h}_i der Form (3.46) darstellen. Nach Multiplikation mit e^{ik_1x} und Variablenwechsel $y + x \mapsto y$ erhält man (3.42). Durch eine analoge Rechnung findet man die Darstellung (3.43). \square

Die Kerne $\widehat{U}_i, \widehat{W}_i$ sind durch Gleichung (3.10) wie folgt bestimmt. Die Funktion \widehat{f}_1 erfüllt die eichtransformierte Gleichung $(\partial_x - \widehat{A}_x)\widehat{f}_1 = 0$ mit dem Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \widehat{A}_x &= i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2}(\pi_0 - \partial_x \varphi) & me^{i\pi\mathcal{Q}}(\lambda - \lambda^{-1}e^{-2i\beta\varphi}) \\ me^{i\pi\mathcal{Q}}(\lambda - \lambda^{-1}e^{2i\beta\varphi}) & -\frac{\beta}{2}(\pi_0 - \partial_x \varphi) \end{pmatrix} \\ &=: \lambda\widehat{A}_1 + \widehat{A}_0 + \lambda^{-1}\widehat{A}_{-1}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Wenn man die Darstellung (3.42) in diese Gleichung einsetzt, bekommt man Terme mit Faktoren λ und λ^{-1} . Diese werden folgendermaßen umgeschrieben:

$$\lambda^{-2}e^{ik_1y} = e^{ik_1y} - \frac{1}{im\lambda}\partial_y e^{ik_1y}, \quad \lambda e^{ik_1y} = \frac{1}{im}\partial_y e^{ik_1y} + \frac{1}{\lambda}e^{ik_1y}.$$

Durch partielle Integration, welche unter der Annahme der Differenzierbarkeit in der zweiten Variablen durchführbar ist, Multiplikation mit e^{-ik_1x} und Substitution $y - x \mapsto x$ ergeben sich durch Koeffizientenvergleich (bzgl. der Variablen λ) und unter Verwendung des Riemann-Lebesgue-Lemmas für die Kerne $\widehat{U}_1(x, y)$ und $\widehat{W}_1(x, y)$ die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \left(\partial_x + \frac{1}{im}\widehat{A}_1(x)\partial_y\right)\widehat{U}_1 &= \widehat{A}_0(x)\widehat{U}_1 + \left(\widehat{A}_1(x) + \widehat{A}_{-1}(x)\right)\widehat{W}_1, \\ \left(\partial_x - \frac{1}{im}\widehat{A}_{-1}(x)\partial_y\right)\widehat{W}_1 &= \widehat{A}_0(x)\widehat{W}_1 + \left(\widehat{A}_1(x) + \widehat{A}_{-1}(x)\right)\widehat{U}_1. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Sie erfüllen die Randbedingungen:²⁹

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{im}\widehat{A}_1(x)\right)\widehat{U}_1(x, x) &= -\widehat{A}_0(x)\widehat{f}_1^0, \\ \left(1 + \frac{1}{im}\widehat{A}_{-1}(x)\right)\widehat{W}_1(x, x) &= -\left(\widehat{A}_{-1}(x) + im\right)\widehat{f}_1^0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Diese Gleichungen erlauben es, falls $\widehat{U}_i(x, y)$ und $\widehat{W}_i(x, y)$ bekannt sind, den Zusammenhang $\widehat{A}_x(x, \lambda)$ und damit auch das Feld φ zu rekonstruieren. Insbesondere folgt aus den Randbedingungen:

$$e^{2i\beta\varphi(x)} = \frac{im + e^{i\pi\mathcal{Q}}(\widehat{W}_1)_2(x, x)}{im + (\widehat{W}_1)_1(x, x)}. \quad (3.50)$$

²⁹Genauer ergeben sich mit dem Riemann-Lebesgue-Lemma zuerst die Randbedingungen (3.49), sodass die Injektivität der Fouriertransformation zu (3.48) führt.

Anstelle des Riemann-Lebesgue-Lemmas führt das Gleichsetzen der von k_1 abhängigen und der von k_1 unabhängigen Terme nach dem Koeffizientenvergleich zum selben Ergebnis.

Die Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung, welche später besprochen wird, verbindet $\widehat{U}_i(x, y)$ und $\widehat{W}_i(x, y)$ direkt mit den Streudaten. (vgl. [13] S.487-496)

4. Zeitentwicklung

In diesem Abschnitt soll die Zeitentwicklung der Streudaten, welche bisher zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Asymptotik der Felder $\varphi(x, 0) = \varphi(x)$ und $\pi_0(x, 0) = \pi_0(x)$ konstruiert wurden, bestimmt werden. Es stellt sich heraus, dass die Zeitentwicklung der Streudaten durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen bestimmt ist.

Proposition 4.1. *Die Zeitentwicklung der Streudaten des Sine-Gordon-Modells ist linear.³⁰*

$$\begin{aligned} \dot{a}(\lambda, t) &= 0, & \dot{b}(\lambda, t) &= 2ik_0b(\lambda, t), \\ \dot{\lambda}_n &= 0, & \dot{c}_n &= -2ik_0^{(n)}c_n, \end{aligned} \quad (4.1)$$

wobei $k_0^{(n)} = k_0|_{\lambda=\lambda_n}$, sowie $k_1^{(n)} = k_1|_{\lambda=\lambda_n}$ eingeführt wurden.

Beweis. Man erinnere sich an die Asymptotik der Jost-Lösung f_1 :

$$\begin{aligned} f_1(x, \lambda)|_{x \rightarrow +\infty} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{ik_1x}, \\ f_1(x, \lambda)|_{x \rightarrow -\infty} &\sim a(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ik_1x} - b(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1x}. \end{aligned}$$

Die Zeitentwicklung einer Lösung Ψ von (3.10) ist durch die Zeitentwicklungsgleichung $(\partial_t - A_t)\Psi = 0$ gegeben. In der Asymptotik erhält man die Gleichungen

$$(\partial_t + ie^{i\pi\mathcal{Q}}k_0\sigma_1)\Psi = 0, \quad x \rightarrow +\infty; \quad (\partial_t + ik_0\sigma_1)\Psi = 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (4.2)$$

Setzt man $\Psi := \alpha(t)f_1(x, t, \lambda)$, so erhält man $\dot{\alpha} = -ik_0\alpha$ aus der Asymptotik $x \rightarrow +\infty$ und aus der Asymptotik $x \rightarrow -\infty$ erhält man

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha a) + ik_0(\alpha a) &= 0, \\ \partial_t(\alpha b) - ik_0(\alpha b) &= 0. \end{aligned}$$

Daher folgt $\dot{a}(\lambda, t) = 0$ und $\dot{b}(\lambda, t) = 2ik_0b(\lambda, t)$.

Gilt $a(\lambda_n) = 0$ (gebundener Zustand), so kann sich λ_n nicht zeitlich ändern, da $a \neq 0$ analytisch in der Ebene $\Im(\lambda) > 0$ ist, und nicht explizit von der Zeit abhängt.

³⁰Man erinnere sich an die Definitionen $k_0 = m(\lambda + \lambda^{-1})$ und $k_1 = m(\lambda - \lambda^{-1})$.

Als nächstes betrachte man die Funktion $f_n(x) \equiv f_2(x, \lambda_n) = c_n f_1(x, \lambda_n)$:

$$f_n(x)|_{x \rightarrow -\infty} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-ik_1^{(n)}x}, \quad f_n(x)|_{x \rightarrow +\infty} \sim c_n \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi\mathcal{Q}} \end{pmatrix} e^{ik_1^{(n)}x}.$$

Setzt man $\Psi_n = \alpha(t)f_n$, so erhält man für $x \rightarrow -\infty$ analog $\dot{\alpha} = ik_0^{(n)}\alpha$, sodass sich für $x \rightarrow +\infty$ die Gleichung $\dot{c}_n + 2ik_0^{(n)}c_n = 0$ ergibt. \square

Nach einer Integration der Gleichungen (4.1) erhält man die Zeitentwicklung

$$\begin{aligned} a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), & b(\lambda, t) &= e^{2ik_0 t} b(\lambda, 0), \\ \lambda_n(t) &= \lambda_n(0), & c_n(t) &= e^{-2ik_0^{(n)} t} c_n(0). \end{aligned} \quad (4.3)$$

(vgl. [13] S.497-498)

5. Inverse Streuung

Die Inverse Streuung beschäftigt sich mit dem Problem, das ursprüngliche Potential bzw. die Zusammenhangskomponente A_x aus den Streudaten zu rekonstruieren. Die Kerne \widehat{U}_i und \widehat{W}_i können aus den Streudaten mithilfe der Gelfand-Levitan-Marchenko-Integralgleichung³¹ bestimmt werden, sodass sich A_x aus den Randbedingungen (3.49), und das Feld φ aus Gleichung (3.50) ergibt. Um diese herzuleiten, schreibt man Gleichung (3.21) in der Form

$$\frac{f_2(x, \lambda)}{a(\lambda)} = r(\lambda)f_1(x, \lambda) + i\bar{f}_1(x, \lambda), \quad r(\lambda) := -\frac{b^*(\lambda)}{a(\lambda)} \quad (5.1)$$

und multipliziert mit $g^{-1} := (e^{\frac{i}{2}(\beta\varphi - \pi\mathcal{Q})\sigma_3})^{-1} = e^{-\frac{i}{2}(\beta\varphi - \pi\mathcal{Q})\sigma_3}$, sodass man unter Verwendung von $f_1 = g\widehat{f}_1$, $f_2 = ge^{i\frac{\pi\mathcal{Q}}{2}\sigma_3}\widehat{f}_2$ und $\bar{f}_1 = \sigma_2 f_1^* = gg^{-1}\sigma_2 g^* \widehat{f}_1^* = g\sigma_2 \widehat{f}_1^* = g\widehat{\bar{f}}_1$ die Gleichung

$$e^{i\frac{\pi\mathcal{Q}}{2}\sigma_3} \frac{\widehat{f}_2(x, \lambda)}{a(\lambda)} = r(\lambda)\widehat{f}_1(x, \lambda) + i\widehat{\bar{f}}_1(x, \lambda) \quad (5.2)$$

erhält. Die Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung ist im wesentlichen die Fouriertransformierte dieser Gleichung. Um diese Transformation durchzuführen, verwendet man unter anderem Lemma 5.1.

Lemma 5.1. *Man verwendet die über das Hauptwertintegral*

$$\oint_{-\infty}^{\infty} d\lambda := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1/\epsilon}^{-\epsilon} d\lambda + \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} d\lambda \right) \quad (5.3)$$

³¹Man kann zeigen, dass aus der GLM-Gleichung die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen folgt. Der Beweis besteht in einer Anwendung der Theorie der kompakten Operatoren. (vgl. [9] S.418-419)

definierten Distributionen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1x} d\lambda = \frac{2\pi}{m} \delta(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_1x}}{\lambda} d\lambda = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_1x}}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2\pi}{m} \delta(x). \quad (5.4)$$

Beweis. Die erste Formel ergibt sich aus der Substitution $\lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda}$ im Integral von $-\frac{1}{\epsilon}$ bis $-\epsilon$, der Identität $\frac{1}{m} dk_1 = (1 + \frac{1}{\lambda^2}) d\lambda$, einer entsprechenden Transformation der Integrationsgrenzen, und der Fourierdarstellung der Delta-Distribution

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1x} d\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{ik_1x} (1 + \frac{1}{\lambda^2}) d\lambda = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1x} dk_1 = \frac{2\pi}{m} \delta(x).$$

Die gleiche Substitution ($\lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda}$ im Integral von $-\frac{1}{\epsilon}$ bis $-\epsilon$) führt zur zweiten Formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_1x}}{\lambda} d\lambda = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{ik_1x} (-\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}) d\lambda = 0.$$

Die dritte Formel entspricht nach der Substitution $\lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda}$ der ersten. \square

Satz 5.2 (Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung). *Die Kerne $\widehat{U}_1(x, y), \widehat{W}_1(x, y), y \geq x$ aus der Fourierdarstellung (3.42) von \widehat{f}_1 erfüllen die linearen Integralgleichungen:*

$$-\frac{2\pi i}{m} \widehat{\overline{U}}_1(x, y) = F_0(x+y) \widehat{f}_1^0 + \int_x^{\infty} (F_0(y+z) \widehat{U}_1(x, z) + F_{-1}(y+z) \widehat{W}_1(x, z)) dz, \quad (5.5)$$

$$-\frac{2\pi i}{m} \widehat{\overline{W}}_1(x, y) = F_{-1}(x+y) \widehat{f}_1^0 + \int_x^{\infty} (F_{-1}(y+z) \widehat{U}_1(x, z) + F_{-2}(y+z) \widehat{W}_1(x, z)) dz. \quad (5.6)$$

Die Kerne $\widehat{\overline{U}}_1$ und $\widehat{\overline{W}}_1$ ergeben sich dabei aus \widehat{U}_1 und \widehat{W}_1 durch komplexe Konjugation und Multiplikation mit σ_2 . Die Funktionen $F_j(x)$ sind direkt durch die Streudaten gegeben:

$$F_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^j e^{ik_1x} r(\lambda) d\lambda - 2\pi i \sum_n e^{ik_1^{(n)}x} \lambda_n^j m_n. \quad (5.7)$$

Die Parameter m_n sind unter der Annahme $a'(\lambda_n) = \frac{da}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda_n} \neq 0$ definiert durch

$$m_n = \frac{c_n}{a'(\lambda_n)}.$$

Beweis. Nach Definition von \widehat{U}_1 und \widehat{W}_1 ist das zweite Argument immer größer oder gleich dem ersten, sodass \widehat{U}_1 und \widehat{W}_1 durch die beiden Gleichungen (5.5) und (5.6) in ihrem Definitionsbereich bestimmt sind. Nachdem man von Gleichung (5.2) den Grenzwert $ie^{-ik_1x} \widehat{f}_1^0$ ($\lambda \rightarrow \pm\infty$) der rechten Seite der Gleichung abgezogen hat, bleibt ein im Unendlichen schnell abfallender und in $\lambda = 0$ beschränkter Term, welcher nach der Multiplikation mit $\lambda^j e^{ik_1y}$, $j = 0, -1$ bezüglich λ über die reelle Achse integriert werden kann, indem man

das Hauptwertintegral in Lemma 5.1 bildet.³²

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^j e^{ik_1 y} \left(e^{i\frac{\pi Q}{2}\sigma_3} \frac{\widehat{f}_2(x, \lambda)}{a(\lambda)} - ie^{-ik_1 x} \widehat{f}_1 \right) = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^j e^{ik_1 y} \left(r(\lambda) \widehat{f}_1(x, \lambda) + i\widehat{f}_1(x, \lambda) - ie^{-ik_1 x} \widehat{f}_1 \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Mit der Fourierdarstellung von \widehat{f}_1 und $\widehat{f}_1 = \sigma_2 \widehat{f}_1^*$ aus Proposition 3.7 kann die rechte Seite von (5.8) unter Verwendung von Lemma 5.1 umgeformt werden.

Für $j = 0, -1$ ergibt sich (5.9) bzw. (5.10)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{ik_1 y} \left(r(\lambda) \widehat{f}_1(x, \lambda) + i\widehat{f}_1(x, \lambda) - ie^{-ik_1 x} \widehat{f}_1^0 \right) = R_0(x+y) \widehat{f}_1^0 \\ & + i\frac{2\pi}{m} \theta(y-x) \widehat{U}_1(x, y) + \int_x^{\infty} dz \left(R_0(y+z) \widehat{U}_1(x, z) + R_{-1}(y+z) \widehat{W}_1(x, z) \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^{-1} e^{ik_1 y} \left(r(\lambda) \widehat{f}_1(x, \lambda) + i\widehat{f}_1(x, \lambda) - ie^{-ik_1 x} \widehat{f}_1^0 \right) = R_{-1}(x+y) \widehat{f}_1^0 \\ & + i\frac{2\pi}{m} \theta(y-x) \widehat{W}_1(x, y) + \int_x^{\infty} dz \left(R_{-1}(y+z) \widehat{U}_1(x, z) + R_{-2}(y+z) \widehat{W}_1(x, z) \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

wobei die Definition (5.11), $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ und

$$R_j(x) := \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^j e^{ik_1 x} r(\lambda), \quad j = 0, -1, -2 \quad (5.11)$$

verwendet wurde. Die Auswertung der linken Seite von (5.8) erfolgt unter Verwendung der Analytizität der Jost-Lösungen und der Jost-Funktion mit dem Residuensatz. Dazu bezeichne C_α die mathematisch positiv orientierte Halbkreislinie in der oberen Halbebene um den Ursprung 0 mit Radius α . Man schließt die Integrale in Definition (5.3) für jedes ϵ mit einem negativ orientierten Halbkreis $-C_\epsilon$ und einem positiv orientierten Halbkreis $C_{1/\epsilon}$, sodass sich mit dem Residuensatz Gleichung (5.12) ergibt:³³

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \lambda^j e^{ik_1 y} \left(e^{i\frac{\pi Q}{2}\sigma_3} \frac{\widehat{f}_2(x, \lambda)}{a(\lambda)} - ie^{-ik_1 x} \widehat{f}_1 \right) = 2\pi i e^{i\frac{\pi Q}{2}\sigma_3} \sum_n \lambda_n^j e^{ik_1^{(n)} y} \frac{\widehat{f}_2(x, \lambda_n)}{a'(\lambda_n)} \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon - C_{1/\epsilon}} d\lambda \lambda^j e^{ik_1 y} \left(e^{i\frac{\pi Q}{2}\sigma_3} \frac{\widehat{f}_2(x, \lambda)}{a(\lambda)} - ie^{-ik_1 x} \widehat{f}_1 \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Dabei wird die Notation $\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{-\gamma_2} = \int_{\gamma_1 - \gamma_2}$ verwendet. Die Halbkreisintegrale können unter Benutzung der Asymptotik der Jost-Lösungen und der Jost-Funktion aus

³² $b(\lambda)$ fällt nach einer Anmerkung in Kap. 3 für $\lambda \rightarrow 0, \pm\infty$ schnell ab. Die Asymptotik der Jost-Lösungen und der Jost-Funktion ist durch die Propositionen 3.4 und 3.5 gegeben, sodass das Hauptwertintegral existiert.

³³Der Einfachheit halber wird angenommen, dass $a(\lambda)$ ausschließlich einfache Nullstellen besitzt.

den Propositionen 3.4 und 3.5 weiter vereinfacht werden. Für genügend kleine ϵ gilt auf diesen Halbkreisen $\widehat{f}_2(x, \lambda) = e^{-ik_1 x} \times g(x, \lambda)$, sodass $g(x, \lambda)$ und $\frac{1}{a(\lambda)}$ beschränkt sind. Speziell für $|\lambda| \rightarrow \infty$ gilt

$$\frac{\widehat{f}_2(x, \lambda)}{a(\lambda)} = e^{\frac{i\pi\mathcal{Q}}{2}} e^{-ik_1 x} (\widehat{f}_2^0 + \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda})),$$

wobei der Term $e^{\frac{i\pi\mathcal{Q}}{2}(1+\sigma_3)} e^{-ik_1 x} \widehat{f}_2^0$ exakt mit dem Grenzwert $ie^{-ik_1 x} \widehat{f}_1^0$ übereinstimmt, was aufgrund der Definitionen in Proposition 3.7 klar ist.

Für $j = 0$ betrachtet man Integrale der Form $\int_{C_\epsilon} \mathcal{O}(1) e^{ik_1(y-x)} d\lambda$ und $\int_{C_{1/\epsilon}} \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda}) e^{ik_1(y-x)} d\lambda$, wobei k groß ist und $y > x$. Da $e^{ik_1(y-x)}$ in der oberen Halbebene nach oben durch 1 beschränkt ist, ist das Integral über C_ϵ bis auf einen konstanten Faktor durch $\pi\epsilon$ beschränkt, sodass das Integral im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert. Integrale der Art $\int_{C_{1/\epsilon}} e^{ik_1(y-x)} \mathcal{O}(\frac{1}{\lambda}) d\lambda$ verschwinden für $y > x$ und $\epsilon \rightarrow 0$. Dies folgt direkt aus dem Lemma von Jordan. Alternativ genügt es, den Integrationsweg in zwei Stücke der Länge $\pi\sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$, welche direkt an die reelle Achse anknüpfen, und ein Stück der Länge $\pi(\frac{1}{\epsilon} - \sqrt{\frac{4}{\epsilon}})$ zu unterteilen, sodass eine einfache Abschätzung des Integranden zur Aussage führt.³⁴ Aus diesem Grund verschwinden die Halbkreisintegrale für $j = 0$ und $y > x$ im Limes $\epsilon \rightarrow 0$.

Für $j = -1$ betrachtet man Integrale der Form $\int_C \frac{1}{\lambda} e^{ik_1(y-x)} d\lambda$ und $y > x$. Das Integral über $C_{1/\epsilon}$ verschwindet nach obiger Argumentation. Das Gleiche gilt für das Integral $\int_{-C_\epsilon} \frac{1}{\lambda} e^{ik_1(y-x)}$, welches nach der Substitution $\lambda \mapsto -\frac{1}{\lambda}$ in das Integral $\int_{C_{1/\epsilon}} \frac{1}{\lambda} e^{ik_1(y-x)}$ übergeht. Deshalb verschwinden für $j = -1$ auch alle höheren Ordnungen, sodass die Halbkreisintegrale für $y > x$ im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ verschwinden.

Zuletzt wird $f_2(x, \lambda_n) = c_n f_1(x, \lambda_n)$ verwendet, sodass $\widehat{f}_2(x, \lambda_n)$ in Gleichung (5.12) durch $c_n e^{-i\frac{\pi\mathcal{Q}}{2}\sigma_3} \widehat{f}_1(x, \lambda_n)$ ersetzt werden kann. Für $\widehat{f}_1(x, \lambda_n)$ setzt man schließlich die Fourierdarstellung (3.42) ein:

$$e^{ik_1^{(n)} y} \lambda_n^j \frac{\widehat{f}_2(x, \lambda_n)}{a'(\lambda_n)} = e^{-i\frac{\pi\mathcal{Q}}{2}\sigma_3} e^{ik_1^{(n)} y} \frac{c_n \lambda_n^j}{a'(\lambda_n)} \left[e^{ik_1^{(n)} x} \widehat{f}_1^0 + \int_x^\infty dz e^{ik_1^{(n)} z} (\widehat{U}_1(x, z) + \lambda^{-1} \widehat{W}_1(x, z)) \right].$$

Insgesamt ergibt sich für $y > x$ die Gelfand-Levitan-Marchenko Gleichung, welche wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Kerne \widehat{U}_1 und \widehat{W}_1 in der zweiten Variablen für festes $x \leq y$ auch für $y = x$ gefolgert werden kann. \square

(vgl. [13] S.498-502)

³⁴Auf den beiden Stücken der Länge $\pi\sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$ schätzt man den Exponentialterm durch 1 ab und wendet die Standartabschätzung an. Auf dem verbleibenden Stück schätzt man den Exponentialterm durch $\alpha_0 \exp\left(-\frac{\sin(\sqrt{\epsilon})}{\epsilon}(y-x)\right)$ (mit einer Konstanten α_0) ab, was jede Potenz von $\frac{1}{\epsilon}$ dominiert.

6. Solitonen

In diesem Kapitel sollen die solitonischen Lösungen der Sine-Gordon-Gleichung vorgestellt werden, für die sich aus Satz 5.2 im Spezialfall $r(\lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ein lineares Gleichungssystem herleiten lässt, welches für gegebene diskrete Streudaten zu lösen ist. Die Bedingung $r \equiv 0$ entspricht der physikalischen Interpretation, dass in dem Streuproblem (3.10) kein Teil der einlaufenden Welle reflektiert wird.³⁵

6.1. Solitonen und Breather

Die Kerne F_j in Satz 5.2 sind in diesem Spezialfall durch Gleichung (6.1) bestimmt:

$$F_j(x) = -2\pi i \sum_n e^{ik_1^{(n)}x} \lambda_n^j m_n. \quad (6.1)$$

Es ist sinnvoll Gleichung (5.5) und (5.6) umzuschreiben

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \overline{\widehat{U}}_1(x, y) &= \sum_n e^{ik_1^{(n)}(x+y)} m_n \left(\widehat{f}_1^0 + \int_0^\infty dz e^{ik_1^{(n)}z} \left[\widehat{U}_1(x, x+z) + \lambda_n^{-1} \widehat{W}_1(x, x+z) \right] \right), \\ \frac{1}{m} \overline{\widehat{W}}_1(x, y) &= \sum_n e^{ik_1^{(n)}(x+y)} \lambda_n^{-1} m_n \left(\widehat{f}_1^0 + \int_0^\infty dz e^{ik_1^{(n)}z} \left[\widehat{U}_1(x, x+z) + \lambda_n^{-1} \widehat{W}_1(x, x+z) \right] \right), \end{aligned}$$

sodass sich die y-Abhängigkeit der Kerne \widehat{U}_1 und \widehat{W}_1 ergibt:

$$\begin{aligned} \widehat{U}_1(x, y) &= \sum_n e^{-ik_1^{*(n)}(x+y)} m_n^* u_n(x), \\ \widehat{W}_1(x, y) &= \sum_n e^{-ik_1^{*(n)}(x+y)} m_n^* w_n(x). \end{aligned}$$

Rückeinsetzen, Ausführen des Integrals und Vergleich der Koeffizienten vor $e^{ik_1^{(n)}y}$ führt zu:

$$\frac{1}{m} \overline{u}_n(x) = \widehat{f}_1^0 + \sum_p e^{-2ik_1^{*(p)}x} \frac{im_p^*}{k_1^{(n)} - k_1^{*(p)}} (u_p(x) + \lambda_n^{-1} w_p(x)) = \frac{\lambda_n}{m} \overline{w}_n(x).$$

Es bleiben die Funktionen $u_n(x)$ zu bestimmen. Unter Verwendung von $\lambda_n^* w_n(x) = u_n(x)$ und $k_1^{(n)} - k_1^{*(p)} = m(\lambda_n - \lambda_p^*)(1 + 1/(\lambda_n \lambda_p^*))$ erhält man

$$\overline{u}_n(x) = m \widehat{f}_1^0 + \sum_p e^{-2ik_1^{*(p)}x} \frac{im_p^*}{\lambda_n - \lambda_p^*} u_p(x), \quad (6.2)$$

welche in Matrizenform $\overline{u} = m f + V u$ lautet, sodass die n-te Komponente von f bzw. u aus den Vektoren \widehat{f}_1^0 bzw. $u_n(x)$ bestehen. Die Komponenten von V lauten:

$$V_{np} = e^{-2ik_1^{*(p)}x} \frac{im_p^*}{\lambda_n - \lambda_p^*}. \quad (6.3)$$

³⁵ $r(\lambda)$ bezeichnet man als den Reflektionskoeffizienten.

Um die Vektorkomponenten dieses Gleichungssystems zu entkoppeln, konjugiert man Gleichung (6.2), verwendet $\bar{u} = -u$ und setzt in diese wiederum Gleichung (6.2) ein. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$(1 + V^*V)u = -m\bar{f} - V^*mf, \quad (6.4)$$

welches für gegebene Konstanten m_n und λ_n zu lösen ist. Mit Gleichung (3.50) und der Zeitentwicklung in Kapitel 4 ergeben sich die sogenannten Solitonen- und Breatherlösungen der Sine-Gordon Gleichung.

Solitonen entsprechen rein imaginären Nullstellen der Jost-Funktion, wobei Breather sich aus zwei, an der imaginären Achse gespiegelten, Nullstellen ergeben.

(vgl. [13] S.502-504)

6.2. Multisolitonen

Falls alle Nullstellen von $a(\lambda)$ rein imaginär sind ($\lambda_n = i\mu_n$), ist $V = V^*$. Denn aus $-\lambda_n^* = \lambda_n$ folgt $(a(i\mu_n))^* = e^{i\pi Q}a(i\mu_n)$ und $c_n^* = -e^{i\pi Q}c_n$, sodass sich $m_p^* = m_p$ ³⁶ ergibt. Also ist

$$V_{np} = V_{np}^* = \frac{m_p}{\mu_n + \mu_p} e^{-2m(\mu_p + \mu_p^{-1})x} =: \frac{\mu_p}{\mu_n + \mu_p} X_p, \quad X_p := \frac{m_p}{\mu_p} e^{-2m(\mu_p + \mu_p^{-1})x}. \quad (6.5)$$

Das lineare Gleichungssystem (6.4) lautet in diesem Fall:

$$(1 + V^2)u = -m\bar{f} - Vmf.$$

Indem man $(1 + V^2)$ als $(1 + ie^{i\pi Q}V)(1 - ie^{i\pi Q}V)$ schreibt, findet man die Lösung

$$u_1 = ime^{i\pi Q}(1 - ie^{i\pi Q}V)^{-1}b, \quad u_2 = -im(1 + ie^{i\pi Q}V)^{-1}b, \quad (6.6)$$

wobei b der Vektor mit den Komponenten $b_n = 1, \forall n$ ist. An dieser Stelle kann das Feld φ direkt durch Gleichung (3.50) berechnet werden.

Proposition 6.1. *Es gelten die folgenden Gleichungen:*

$$im + (\widehat{W}_1)_1(x, x) = im \frac{\det(1 + ie^{i\pi Q}V)}{\det(1 - ie^{i\pi Q}V)}, \quad (6.7)$$

$$im + e^{i\pi Q}(\widehat{W}_1)_2(x, x) = im \frac{\det(1 - ie^{i\pi Q}V)}{\det(1 + ie^{i\pi Q}V)}. \quad (6.8)$$

³⁶Man beachte die Transformation der Ableitung.

Beweis. Der Beweis von Gleichung (6.8) erfolgt durch eine ähnliche Rechnung, wie der von Gleichung (6.7). Deshalb genügt es auf Gleichung (6.8) einzugehen. Per definitionem ist

$$(\widehat{W}_1)_1(x, x) = i \sum_n X_n \cdot (u_1)_n =: -m e^{i\pi Q} \text{tr}(M), \quad M := (1 - i e^{i\pi Q} V)^{-1} b \otimes X$$

gegeben, wobei X der Vektor mit den Komponenten X_p aus Gleichung (6.5) ist. Also ist

$$im + (\widehat{W}_1)_1(x, x) = im(1 + i e^{i\pi Q} \text{tr}(M)).$$

Da M den Rang 1 hat, ist $1 + \text{tr}(i e^{i\pi Q} M) = \det(1 + i e^{i\pi Q} M)$.³⁷ Weiter ist

$$1 + i e^{i\pi Q} M = (1 - i e^{i\pi Q} V)^{-1} (1 - i e^{i\pi Q} (V - b \otimes X)).$$

Man verwendet nun $(V - b \otimes X) = -\mu V \mu^{-1}$, mit den Komponenten $\mu_{np} = \delta_{np} \mu_p$:

$$1 + i e^{i\pi Q} M = (1 - i e^{i\pi Q} V)^{-1} \mu (1 + i e^{i\pi Q} V) \mu^{-1}.$$

Die Determinante dieser Matrix führt schlussendlich zu (6.7). □

Gleichung (3.50) führt deshalb zu

$$e^{2i\beta\varphi} = \frac{\det^2(1 - i e^{i\pi Q} V)}{\det^2(1 + i e^{i\pi Q} V)}, \quad (6.9)$$

woraus sich $\varphi(x, t)$ ergibt, indem man die Zeitentwicklung $m_p \mapsto m_p e^{2m(\mu_p - \mu_p^{-1})t}$ aus Kapitel 4 einsetzt. (vgl. [13] S.504-505)

6.3. Streuung und Asymptotik

Die Einsolitonenlösung lässt sich am einfachsten durch die in Kapitel 2 eingeführten Konstanten $m_0 = 4m$ und $\beta_0 = -2\beta$ ausdrücken. Es ist anzumerken, dass man, da die Funktion $\varphi \bmod \frac{2\pi}{\beta_0}$ gesucht ist, die 2 im Exponenten beider Seiten von Gleichung (6.9) „kürzen“ kann:

$$\varphi_1(x, t) = \frac{4e^{i\pi Q}}{\beta_0} \arctan \left(\alpha_1 e^{-m_0 \gamma_1 (x - v_1 t)} \right). \quad (6.10)$$

Dabei ist $v_1 = \frac{\mu_1 - \mu_1^{-1}}{\mu_1 + \mu_1^{-1}}$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_1^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2}}$ und $\alpha_1 = \frac{m_1}{2\mu_1}$.

³⁷Dies ist klar, denn die Determinante ist das Produkt der Eigenwerte, die Spur ist die Summe Eigenwerte und eine Matrix ersten Ranges hat nur einen Eigenwert $\neq 0$.

Analog findet man durch Gleichung (6.9) die allgemeine Form der Zweisolitenlösung:

$$\varphi_{1,2}(x, t) = \frac{4e^{i\pi\mathcal{Q}}}{\beta_0} \arctan \left(\frac{\alpha_1 e^{\theta_1} + \alpha_2 e^{\theta_2}}{1 - \alpha_1 \alpha_2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} e^{\theta_1 + \theta_2}} \right), \quad \theta_i = -m_0 \gamma_i (x - v_i t). \quad (6.11)$$

Die übliche Form der Zweisolitenlösung, die beispielsweise durch die sogenannte Bäcklundtransformation aus der Einsolitenlösung konstuiert werden kann, erhält man, indem man $\alpha'_1 = \alpha_1 \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)}$ und $\alpha'_2 = \alpha_2 \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_2 + \mu_1)}$ setzt:

$$\varphi_{1,2}(x, t) = \frac{4e^{i\pi\mathcal{Q}}}{\beta_0} \arctan \left(\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right) \frac{\alpha'_1 e^{\theta_1} - \alpha'_2 e^{\theta_2}}{1 + \alpha'_1 \alpha'_2 e^{\theta_1 + \theta_2}} \right), \quad \theta_i = -m_0 \gamma_i (x - v_i t). \quad (6.12)$$

Alternativ kann die Zweisolitenlösung (6.12) durch

$$\varphi_{1,2}(x, t) = \frac{4e^{i\pi\mathcal{Q}}}{\beta_0} \arctan \left(\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \right) \frac{\sinh \left(\frac{\theta'_1 - \theta'_2}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\theta'_1 + \theta'_2}{2} \right)} \right), \quad \theta'_i = -m_0 \gamma_i (x - v_i t) + \delta_i \quad (6.13)$$

dargestellt werden, wobei $e^{\delta_i} := \alpha'_i$ definiert ist.

Die Streuung eines Solitons mit einem Antisoliton ist in Abbildung 1 dargestellt.

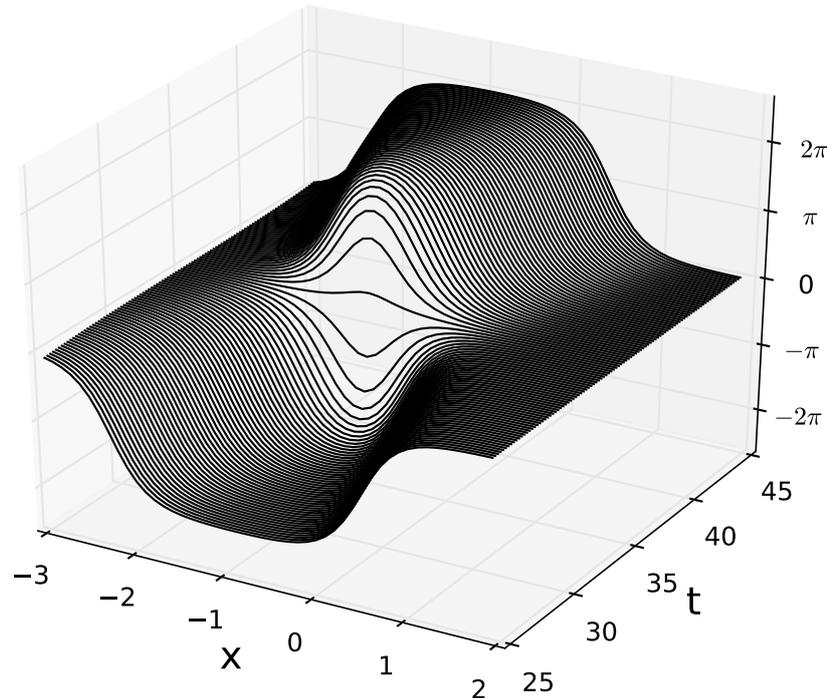


Abbildung 1: Zeitlicher Verlauf der Streuung eines Solitons (von links einlaufend) mit einem Antisoliton (von rechts einlaufend).

Für die Parameter wurde $\beta_0 = 1$, $m = \frac{1}{4}m_0 = 1$, $\mathcal{Q} = 0$, $\mu_1 = \frac{15}{14}$, $\mu_2 = \frac{13}{14}$, $m_1 = e^{-10}$ und $m_2 = -e^{10}$ gewählt. Wählt man die Geschwindigkeit $v_1 = 0$ und v_2 positiv, d.h.

man befindet sich im Ruhesystem des Solitons, so konvergiert die Zweisolitenlösung im Grenzwert $t \rightarrow \infty$ wegen der Stetigkeit der Arkustangensfunktion gegen die Einsolitenlösung mit den Parametern $\mathcal{Q} = 0$, $\mu'_1 = \mu_1$ und $m'_1 = m_1$. Dies liegt daran, dass das Antisoliton sich in diesem Fall nach rechts wegbewegt, sodass keine Streuung mit dem Soliton stattfindet. Nimmt man stattdessen v_2 negativ an, so ergibt sich nach der Streuung im Grenzwert $t \rightarrow \infty$ die Einsolitenlösung mit den Parametern $\mathcal{Q} = 0$, $\mu'_1 = \mu_1$ und $m'_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2} m_1$, welche um 2π nach oben verschoben ist. Betrachtet man die Parameter im Schwerpunktsystem, so ergibt sich $m'_1 = v^2 m_1$, da in diesem Fall $\mu_1 = \mu_2^{-1}$ ist. Der Parameter \mathcal{Q} verliert in diesen Grenzwerten seine Bedeutung, da durch das Antisoliton die Ladung $\mathcal{Q} = 0$ unabhängig von t vorgegeben ist. Bereits für die Einsolitenlösungen kann \mathcal{Q} auf 0 gesetzt werden, sodass eine Lösung entsteht, die nicht den Anfangs angenommen Randbedingungen entspricht. Tatsächlich ergibt sich auch in diesem Fall aus der Definition von \mathcal{Q} , indem man diese Lösung einsetzt, dass \mathcal{Q} für Einsolitenlösungen $+1$ oder -1 sein muss.

Aus der Soliton-Antisoliton-Lösung mit den Geschwindigkeiten $v_1 = -v_2 =: v$, d.h. $\mu_2 = \mu_1^{-1}$, ergibt sich:

$$\varphi_{1,2}(x, t) = \frac{4e^{i\pi\mathcal{Q}}}{\beta_0} \arctan \left(\frac{\sinh(m_0\gamma vt + \Delta_-)}{v \cosh(m_0\gamma x + \Delta_+)} \right), \quad \Delta_{\pm} = \frac{\delta_1 \pm \delta_2}{2}. \quad (6.14)$$

Im Fall komplexer Parameter $\delta_1 = \delta_2^* =: \delta$ ³⁸ lässt sich daraus durch die Wahl einer rein imaginären Geschwindigkeit $v = \frac{i\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$ der stationäre Breather mit der Frequenz $m_0\omega$ konstruieren:³⁹

$$\varphi_3(x, t) = \frac{4e^{i\pi\mathcal{Q}}}{\beta_0} \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\omega^2}}{\omega} \frac{\sin(m_0\omega t + \Im(\delta))}{\cosh(m_0\sqrt{1-\omega^2}x + \Re(\delta))} \right). \quad (6.15)$$

Per Lorentztransformation ergibt sich schließlich der bewegte Breather. (vgl. [18])

7. Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit, die Darstellung der Inversen Streutransformation für das Sine-Gordon-Modell, konnte erreicht werden.

In der Einleitung sind die wichtigsten physikalischen und mathematischen Eigenschaften der Sine-Gordon Gleichung genannt und auf deren Anwendungsgebiete wurde verwiesen. Das Prinzip der Inversen Streutransformation ist durch ein kommutatives Diagramm dargestellt, welches die Analogie zur Fouriertransformation verdeutlicht. Die Hamiltonsche Interpretation der Inversen Streutransformation ist in wenigen Worten erklärt. Aus Zeitgründen kann nicht auf die Konstruktion der Wirkungswinkelvariablen eingegangen werden.

³⁸Dies entspricht der Bedingung $m_2 = m_1^*$, welche sich aus der Definition der m_i ableiten lässt.

Für die Zweisolitenlösung sind die Parameter α'_i , $i = 1, 2$ dagegen rein reell. (vgl. Kap. 6.2)

³⁹ $\Re(\cdot)$ bezeichnet den Realteil.

In Kapitel 2 wird die physikalische Form der Sine-Gordon Gleichung eingeführt, die Lagrange- und Hamilton-Dichte, sowie typische Randbedingungen angegeben. Danach wird auf die Hamiltonsche Struktur eingegangen und Poissonklammern auf dem Raum der physikalischen Observablen definiert. Durch den Hamiltonian H und die kanonisch konjugierten Impulse π_0 und φ kann die Sine-Gordon Gleichung in kanonischer Form angegeben werden. In Unterkapitel 2.1 wird eine der grundlegenden allgemeinen Eigenschaften, die die Sine-Gordon-Gleichung, und einige andere nichtlineare Gleichungen gemeinsam haben, erklärt. Diese verbindet die nichtlinearen Gleichungen mit einem linearen Streuproblem und einer Zeitentwicklungsgleichung, welche bis auf Eichäquivalenz eindeutig bestimmt sind und die Anwendbarkeit der Inversen Streutransformation ermöglichen. Die Sine-Gordon Gleichung ergibt sich aus der Kompatibilität beider Gleichungen („ $\partial_x \partial_t = \partial_t \partial_x$ “).

In Kapitel 3, 4 und 5 wird die Inverse Streutransformation für das Sine-Gordon-Modell in drei Schritten ausführlich erklärt.

Ziel des ersten Schrittes ist die Analyse des direkten Streuproblems mit vorgegebenen Anfangsdaten. Dafür nutzt man die Symmetrien des Problems, die Konstanz der Wronskideterminante und definiert sogenannte „Jost-Lösungen“, deren Asymptotik ($x \rightarrow \pm\infty$) eine bezüglich des Spektralparameters λ analytische Fortsetzung in die obere komplexe Halbebene zulässt. Die aus den Symmetrien des Streuproblems erhaltenen Lösungen lassen sich durch Vergleich der Asymptotik und unter Verwendung der Eindeutigkeit der Lösung mit den Jost-Lösungen in Beziehung setzen. Aus den Wronskideterminanten und den Symmetriebeziehungen können schlussendlich die Streudaten $(a(\lambda), b(\lambda); \lambda_n, c_n, n = 1, \dots, N)$ definiert werden. Durch geeignete Eichtransformationen lässt sich die Asymptotik der Jost-Lösungen bezüglich des Spektralparameters λ bestimmen, sodass mithilfe des Satzes von Paley-Wiener die Fourierdarstellung der Jost-Lösungen gefunden werden kann. Unter der Annahme, dass die Fourierkerne in der zweiten Variablen differenzierbar sind und durch die Anwendung des Riemann-Lebesgue Lemmas, erhält man aus dem direkten Streuproblem zwei lineare partielle Differentialgleichungen, sowie Randbedingungen, welche von den Fourierkernen erfüllt werden. Aus den Randbedingungen lässt sich das Feld φ , die Lösung der Sine-Gordon Gleichung, rekonstruieren.

Ziel des zweiten Schrittes ist die Bestimmung der Zeitentwicklung der Streudaten. Diese lässt sich direkt aus der Zeitentwicklungsgleichung herleiten und besteht in dem Lösen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche man direkt integrieren kann.

Der letzte Schritt besteht darin, aus einer der Symmetriebeziehungen und den Analytizitätseigenschaften der Jost-Lösungen durch eine Integraltransformation die Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung, eine lineare Integralgleichung, herzuleiten. Diese bestimmt die Fourierkerne in ihrem Definitionsbereich eindeutig und setzt sie mit den Streudaten in Beziehung.

In Kapitel 6 werden schließlich die Solitonenlösungen der Sine-Gordon-Gleichung besprochen. Diese ergeben sich im Spezialfall $-\frac{b^*(\lambda)}{a(\lambda)} = r(\lambda) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, dem „reflektionslosen“ Fall. In diesem Fall reduziert sich die Gelfand-Levitan-Marchenko-Gleichung auf das Lösen

eines linearen Gleichungssystems, woraus beliebige Kombinationen aus Solitonen- und Breatherlösungen konstruiert werden können.

Literatur

- [1] *Ableitung der Determinante*. URL: <http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/relativity/node184.html> (besucht am 18.06.2016).
- [2] D. J. Kaup and A. C. Newell. “The Goursat and Cauchy Problems for the Sine-Gordon Equation”. In: Vol. 34 No. 1 (Jan. 1978), S. 37–54. URL: <http://www.jstor.org/stable/2100856> (besucht am 26.04.2016).
- [3] D. W. McLaughlin and A. C. Scott. *Perturbation analysis of fluxon dynamics*. Phys. Rev. A 18, 1978, S. 1652–1680.
- [4] L. P. Eisenhart. *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. New York: Dover Publ., 1960.
- [5] F. C. Frank and J. H. van der Merwe. *One-dimensional dislocations*. Bd. I. Static theory. Proc. Roy. Soc. London A 198, 1949, S. 205–216.
- [6] G. Gaeta, C. Reiss, M. Peyrard and T. Dauxois. *Simple models of non-linear DNA dynamics*. Riv. Nuovo Cimento 17, 1994, S. 1–48.
- [7] I. M. Gelfand and B. M. Levitan. “On the determination of a differential equation from its spectral funktion.” Russisch. In: *Izvestiya Akad. Nauk SSSR*. Ser. Math. 15 (1951), S. 309–360.
- [8] V. T. Laredo. *Exactly solved models of statistical mechanics*. 2011. URL: <http://www.staff.science.uu.nl/~henri105/PDF/ToledanoNotes.pdf> (besucht am 29.05.2016).
- [9] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer-Verlag, 1987.
- [10] M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. Cambridge Univ. Press, 2003.
- [11] M.J. Ablowitz, D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur. “Method for solving the Sine-Gordon equation”. In: *Phys. Rev. Lett.* 30 (März 1973), S. 1262–1264.
- [12] N. R. Quintero and P. G. Kevrekidis. *Nonequivalence of phonon modes in the sine-Gordon equation*. Phys. Rev. E 64, 2001.
- [13] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge University Press, 2003.
- [14] R. N. Garifullin, L. A. Kalyakin and M. A. Shamsutdinov. *Auto-resonance excitation of a breather in weak ferromagnetst*. Comput. Math. Math. Phys. 47, 2007, S. 1158–1170.
- [15] R. Rajaraman. *Solitons and instantons : an introduction to solitons and instantons in quantum field theory*. North-Holland Publ. Company, Amsterdam, 1982.

-
- [16] R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon and H.C. Morris. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Englisch. London u. a.: ACADEMIC PRESS, 1982. 630 S.
- [17] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Englisch. 2. Aufl. XII. New York u. a.: McGraw-Hill, 1974, S. 403–409. 452 S. ISBN: 0-07-054233-3. URL: <http://www.digibib.net/permalink/468/UBWU-x/HBZ:HT000785118>.
- [18] S. Cuenda, N.R. Quintero and A. Sanchez. “SG WOBBLES THROUGH BAECKLUND TRANSFORMATIONS”. In: *DISCRETE AND CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS*. Series S Volume 4.Number 5 (Okt. 2011), S. 1051. URL: <http://allariz.uc3m.es/~anxosanchez/ep/wobbles.pdf> (besucht am 07.09.2016).
- [19] V. A. Marchenko. “On reconstruction of the potential energy from phases of the scattered waves.” Russisch. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR 104* (1955), S. 695–698.

A. Anhang

Der Python Code, mit dem die Einsolitonlösungen, Zweisolitonlösungen und Abbildung 1 generiert wurden, ist im Folgenden dargestellt:

Multisolitonen

September 12, 2016

```
In [1]: %matplotlib qt4
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from matplotlib import animation
import sympy as sp
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

In [2]: beta= -1/2 # Kopplungskonstante beta
Q = 0 # Ladung Q
m = 1 # Parameter m

# um eine stetige Lösung zu erhalten (def von arctan)
# hilft die Transformation mu --> -mu.

mu_1 = 75/70 # Geschwindigkeit v_1 =
# (mu_1-mu_1**(-1))/(mu_1+mu_1**(-1))
mu_2 = 65/70 # Geschwindigkeit v_1 =
# (mu_1-mu_1**(-1))/(mu_1+mu_1**(-1))
m_1 = np.exp(-10) # + für Kink, - für Antikink
m_2 = -np.exp(10) # + für Kink, - für Antikink

def exptheta(x,t,mu_i,m_i):
    return m_i/(2*mu_i)*np.exp(-2*m*((mu_i+mu_i**(-1))*x
    - (mu_i-mu_i**(-1))*t))

def Soliton(x,t,mu_i,m_i):
    return -2*sp.exp(sp.I*sp.pi*Q)/beta*np.arctan(
    exptheta(x,t,mu_i,m_i))

def ZweiSol(x,t):
    return -2*sp.exp(sp.I*sp.pi*Q)/beta*np.arctan(
    (exptheta(x,t,mu_1,m_1)+exptheta(x,t,mu_2,m_2))
    /((1-(mu_1-mu_2)**2/((mu_1+mu_2)**2)*
    exptheta(x,t,mu_1,m_1)*exptheta(x,t,mu_2,m_2))))

In [3]: fig = plt.figure()
axis = plt.axis([-20, 20, -10, 10])
```

```

x = np.arange(-20, 20, 0.05)

def init():
    return plt.plot()

def func_zwei(t):
    return plt.plot(x, ZweiSol(x,t), 'k', lw = 1.5)

def func_ein_1(t):
    return plt.plot(x, Soliton(x,t,mu_1,m_1), 'k', lw = 1.5)

def func_ein_2(t):
    return plt.plot(x, Soliton(x,t,mu_2,m_2), 'k', lw = 1.5)

# func_ein_1 oder func_ein_2 für die Einsolitonenlösung
# 1 bzw. 2, func_zwei für Zweisolitonenlösung, welche
# sich aus den beiden Einsolitonenlösungen ergibt.

anim = animation.FuncAnimation(fig, func_zwei,
                               frames=200, init_func=init,
                               interval=20, blit=True)

plt.show()

```

```

In [4]: fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

x = np.arange(-3, 2, 0.1)
y = np.arange(25, 45, 0.02)

xv, yv = np.meshgrid(x,y)

z = ZweiSol(xv,yv)

ax.set_xlabel('x', fontsize=18)
ax.set_ylabel('t', fontsize=18)
ax.set_zticks([-2*np.pi,-np.pi,0, np.pi, 2*np.pi])
ax.set_zlim([-8,8])
ax.set_zticklabels([r'$-2\pi$', r'$-\pi$', '0',
                    r'$\pi$', r'$2\pi$'])

ax.plot_wireframe(xv, yv, z, rstride=10,
                  cstride=False, color='k')

plt.show()

```

B. Danksagung

Besonderer Dank für die Unterstützung bei der Themenfindung, Hilfe bei der thematischen Einarbeitung und die Diskussion zahlreicher Fragen gilt meinem Erstgutachter Prof. Dr. Hermann Boos und meinem Zweitgutachter Dr. Frank Göhmann.

Ich möchte Herrn Dr. Nirov danken für einige hilfreiche und interessante Gespräche, sowie den Verweis auf das Buch von Babelon, Bernard und Talon, an welchem sich der Hauptteil meiner Arbeit orientiert.

Meinem Funktionalanalysisprofessor Herr Prof. Dr. Batkai danke ich für die Hilfe bei mathematischen Fragen.

Insbesondere bedanke ich mich bei meinen Kommilitonen Frederik, Philipp und Jens für ihre Hilfe beim Korrekturlesen.

Zuletzt danke ich meiner Familie für ihre Unterstützung und insbesondere für das Korrekturlesen, sowie allen anderen, die an dieser Arbeit beteiligt sind.

Name, Vorname:

E r k l ä r u n g

gem. § 14 Abs. 7 Prüfungsordnung vom 15.04.2013

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir eingereichte Abschlussarbeit (Bachelor-Thesis) selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Stellen der Abschlussarbeit, die anderen Werken dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, in jedem Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

.....
Datum

.....
Unterschrift

E r k l ä r u n g

Hiermit erkläre ich mich damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit (Bachelor-Thesis) wissenschaftlich interessierten Personen oder Institutionen und im Rahmen von externen Qualitätssicherungsmaßnahmen des Studienganges zur Einsichtnahme zur Verfügung gestellt werden kann.

Korrektur- oder Bewertungshinweise in meiner Arbeit dürfen nicht zitiert werden.

.....
Datum

.....
Unterschrift